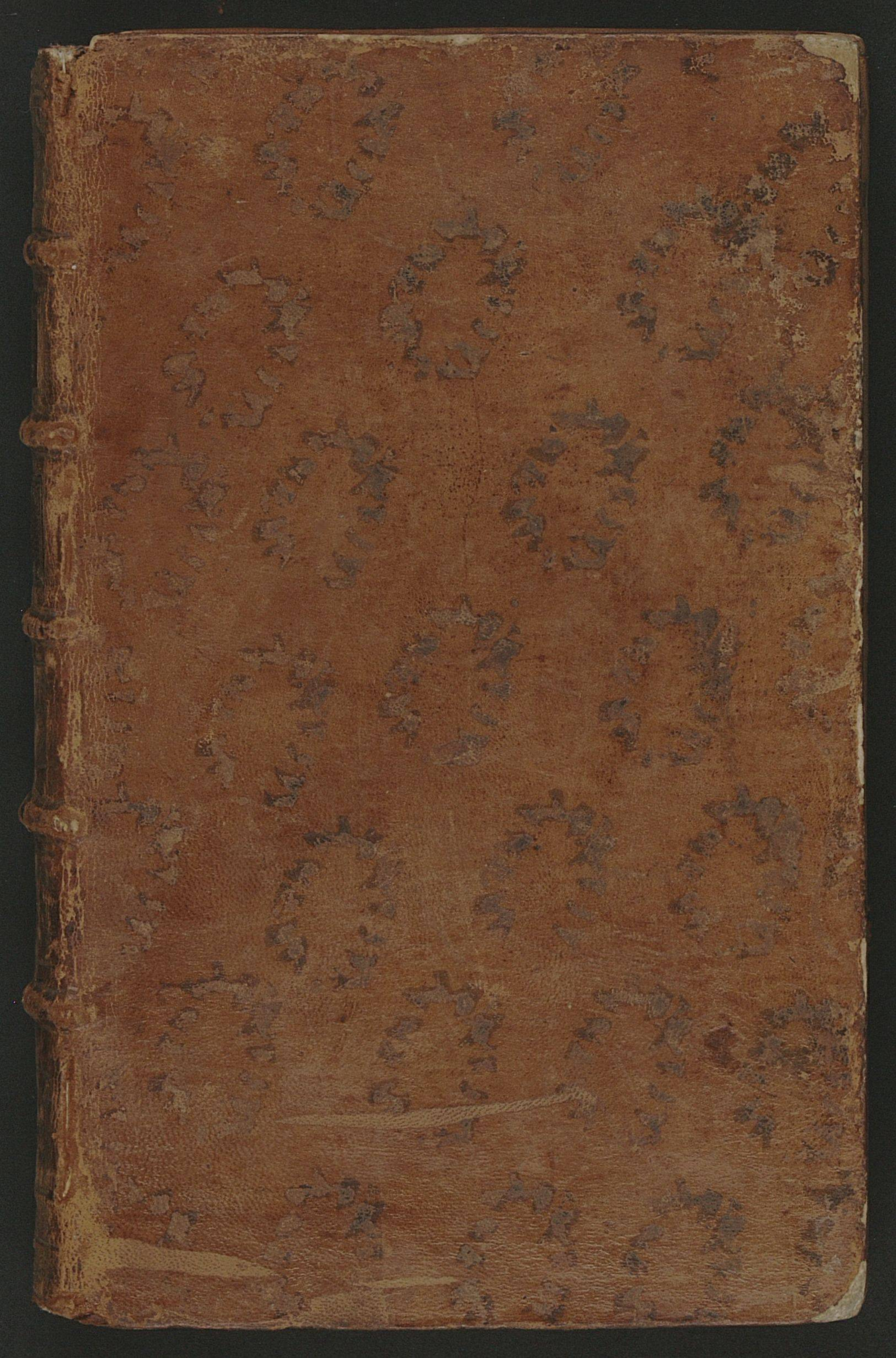






£ 15–

2 vol.
250 –

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

CINQUIEME PARTIE.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'HYDRODYNAMIQUE.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'HYDRODYNAMIQUE:

OUVRAGE

DANS LEQUEL LA THÉORIE ET L'EXPÉRIENCE s'éclairent ou se suppléent mutuellement ; avec des Notes sur plusieurs endroits qui ont paru mériter d'être approfondis.

Par M. l'Abbé BOSSUT, *Examinateur des Ingénieurs, Membre de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de l'Institut de Bologne, & de la Société Royale de Lyon.*

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, Fils aîné, Libraire, rue Dauphine, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXV.

Avec Approbation & Privilége du Roi.



A MONSEIGNEUR
LE DUC
DE CHOISEUL,

Pair de France, Chevalier des Ordres du Roi, & de celui de la Toiſon d'Or, Colonel Général des Suiſſes & Griſons, Lieutenant Général des Armées de Sa Majeſté, Gouverneur & Lieutenant Général de la Province de Touraine, Grand Bailli d'Haguenau, Gouverneur & Grand Bailli du pays des Voſges & de Mirecourt, Miniſtre & Secrétaire d'Etat, ayant le Département des Affaires Etrangeres & de la Guerre, Grand Maître & Surintendant Général des Poſtes, &c.

MONSEIGNEUR,

De toutes les branches des Mathématiques, la Science de l'équilibre & du mouvement des eaux eſt

peut-être la plus intéressante. Elle offre un vaste champ de problêmes aux recherches du Géomètre, & elle est sans cesse utile aux besoins de la Société. Vous l'avez envisagée principalement sous le second point de vûe, MONSEIGNEUR, *lorsqu'après avoir reconnu la nécessité d'y faire marcher de front la théorie & l'expérience, vous m'avez ordonné de composer à l'usage des Ingénieurs un Traité qui réunît ce double avantage. J'ai médité long-temps, j'ai interrogé la nature, j'ai comparé ses réponses aux résultats de la théorie. Recevez avec bonté,* MONSEIGNEUR, *le fruit de ce travail pénible, entrepris sous vos auspices. Quelqu'imparfait qu'il soit, il fournira du moins une nouvelle preuve de votre zèle pour l'avancement des Sciences.*

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant serviteur, BOSSUT.



DISCOURS
*PRÉLIMINAIRE **.

LES connoiſſances des Anciens dans la théorie de la méchanique des corps ſolides ou fluides n'étoient pas auſſi bornées qu'on le croit ordinairement. Archimède qui vivoit 250 ans avant J. C. trouva la propriété du centre de gravité & la loi fondamentale de l'équilibre du levier ; ce qui compoſe tout le fond de la Statique élémentaire. On lui doit encore les principes généraux de l'Hydroſtatique. Dans ſon Livre *de humido Inſidentibus*, il établit qu'un point quelconque d'une maſſe fluide en équilibre eſt également preſſé en toutes ſortes de ſens ; & il examine en conſéquence les conditions qui doivent avoir lieu pour qu'un corps ſolide flottant ſur un fluide prenne & conſerve la ſituation d'équilibre. Il applique à des exemples, compliqués pour la Géométrie de ce temps-là, cette théorie générale

* Ce Diſcours a été lû en partie à l'Aſſemblée publique de l'Académie Royale des Sciences, du 12 Novembre 1768.

qu'on doit regarder comme un précieux monument de ſon génie.

Environ cent trente ans après lui, deux Mathématiciens d'Alexandrie, Cteſibius & Heron, inventèrent pluſieurs machines Hydrauliques très-ingénieuſes, parmi leſquelles il ſuffit de citer la fontaine de compreſſion & le ſyphon recourbé qui ſert à vuider facilement la liqueur d'un tonneau. Sans connoître diſtinctement le reſſort & le poids de l'air, ils employèrent ces deux agens avec ſuccès. Mais ils n'ajoutèrent rien dans le fond aux découvertes Hydroſtatiques d'Archimède.

La ſcience du mouvement des fluides étoit toujours à naître. Sextus-Julius Frontinus, plus connu ſous le nom de *Frontin*, paroît être le premier qui en ait donné quelques idées. Inſpecteur des Fontaines publiques à Rome, ſous les Empereurs Nerva & Trajan, il a laiſſé à ce ſujet un Ouvrage intitulé: *De Aquæductibus urbis Romæ Commentarius.* Il y conſidère le mouvement des eaux qui coulent dans des canaux, ou qui s'échappent, par des ouvertures, des vaſes où elles ſont contenues. Il décrit d'abord les aqueducs de Rome, cite les noms de ceux qui les ont

fait conſtruire, & les époques de leurs conſtructions. Enſuite il fixe & compare enſemble les meſures ou modules dont on ſe ſervoit alors à Rome pour déterminer les dépenſes des ajutages. De-là il paſſe aux moyens de diſtribuer les eaux d'un aqueduc ou d'une fontaine. Il fait des obſervations vraies ſur ces différens objets. Par exemple, il a vu que le produit d'un ajutage ne doit pas ſeulement s'évaluer par la grandeur de cet ajutage, & qu'il faut encore tenir compte de la hauteur du réſervoir; conſidération très-ſimple, & cependant négligée par quelques Fontainiers modernes. Il a ſenti pareillement qu'un tuyau deſtiné à dériver en partie l'eau d'un aqueduc, doit avoir, ſelon les circonſtances, une poſition plus ou moins oblique par rapport au cours du fluide, &c. Mais on ne trouve d'ailleurs aucune préciſion géométrique dans ſes réſultats; il n'a point connu la vraie loi des vîteſſes, relativement aux hauteurs des réſervoirs.

Les Lettres & les Arts étoient déja dans la décadence au temps de Frontin; & bientôt l'Europe fut plongée dans la plus affreuſe barbarie. Cette nuit profonde dura près de

1300 ans. La Poësie & l'Eloquence y jettèrent par intervalles quelques éclairs, trop foibles pour en dissiper l'obscurité. L'esprit humain ne sortit de cet engourdissement qu'au siécle des Médicis. On vit alors la foule des Arts agréables, encouragés & protégés par de simples particuliers, renaître en Italie, & y briller avec le même éclat qu'ils avoient eu autrefois dans les beaux jours de la Grèce & de Rome. Peu-à-peu ils pénétrèrent chez les peuples voisins. La Philosophie eut une marche plus tardive. Je parle sur-tout de cette branche qui, à l'aide du calcul & de la Géométrie, se propose d'expliquer avec certitude & avec évidence les phénomènes de la nature. Ennemie des ornemens, cherchant le vrai dans toute sa simplicité, elle avoit peu d'attraits pour des esprits trop sensibles, peut-être, aux charmes de la Poësie & de la Peinture, & accoutumés à ne cueillir, pour ainsi dire, que les fleurs de l'imagination. L'Italie en fut encore le berceau. Galilée qui florissoit il y a 160 ans, mérita d'en être appellé le pere, parmi les modernes. Il dut également ce titre à ses découvertes Astronomiques, & à sa théo-

rie de l'accélération des graves. Il ne trouva pas les loix du mouvement des Fluides ; mais il facilita cette recherche aux Philoſophes qui le ſuivirent.

Caſtelli, plein de ſa doctrine, & l'un de ſes premiers diſciples, publia en 1628 un petit Traité où il explique très-bien quelques phénomènes du mouvement des eaux courantes. Mais il ſe trompe dans la meſure des vîteſſes qu'il fait proportionnelles aux hauteurs des réſervoirs.

Torricelli, autre diſciple de Galilée, conſidérant que l'eau d'un jet qui ſort par un petit ajutage s'élance verticalement preſqu'à la hauteur du réſervoir, penſa qu'elle devoit avoir la même vîteſſe que ſi elle étoit tombée, par ſa gravité, de cette hauteur. D'où il conclut, conformément à la théorie de ſon Maître, qu'abſtraction faite de la réſiſtance des obſtacles, les vîteſſes des écoulemens ſuivoient la raiſon ſous-doublée des preſſions. Cette idée fut confirmée par des expériences que Raphael Magiotti fit dans ce temps-là ſur les produits de différens ajutages ſous différentes charges d'eau. Torricelli publia ſa découverte en 1643 à la ſuite

d'un petit Traité intitulé : *De Motu gravium naturaliter accelerato*. Elle fit de l'Hydraulique une Science toute nouvelle. Néanmoins elle n'a lieu en rigueur que pour les fluides qui s'écoulent, comme cela arrive ordinairement, par de petits orifices. Lorsque l'orifice est fort grand, le mouvement du fluide suit une autre loi beaucoup plus composée.

Parmi la foule d'écrivains en ce genre, qui succédèrent à Torricelli, & qui mirent son théorême en usage, M. Mariotte mérite d'être cité avec distinction. Né avec un talent rare pour imaginer & exécuter des expériences, ayant eu l'occasion d'en faire un grand nombre sur le mouvement des eaux à Versailles, à Chantilly & dans plusieurs autres endroits, il composa sur cette matière un Traité qui ne fut imprimé qu'après sa mort, arrivée en 1686. Il s'y est trompé en quelques endroits ; il n'a fait qu'effleurer plusieurs questions ; il n'a pas connu le déchet occasionné dans le produit d'un ajutage, par la contraction à laquelle la veine fluide est sujette, lorsque cet ajutage est percé dans une mince paroi. Malgré ces

défauts, son Ouvrage a été fort utile, & il a beaucoup servi au progrès de l'Hydraulique pratique.

En 1687, Newton publia ses *Principes Mathématiques*, & y traita, entr'autres objets, le problême du mouvement des Fluides, par une méthode nouvelle. Pour nous en faire quelqu'idée, représentons-nous avec l'Auteur un vase cylindrique vertical, percé à son fond d'une ouverture par laquelle l'eau s'échappe; concevons que ce vase reçoive par en-haut autant d'eau qu'il en dépense, & que par conséquent il demeure toujours plein à même hauteur. Cela posé, Newton partage la masse entière de l'eau en deux parties. L'une a la figure d'un solide produit par la révolution d'une hyperbole du cinquième degré autour de la droite verticale qui passe par le centre du trou; & ce solide a pour deux de ses élémens le trou même & la surface supérieure du fluide: l'autre partie est le reste de l'eau contenue dans le cylindre. L'Auteur imagine ensuite que les tranches horisontales de l'hyperboloïde sont seules en mouvement, & que le reste de la masse demeure en repos. Il y a

donc ainſi au milieu du fluide une eſpèce de *cataracte* qui ſe renouvelle ſans ceſſe, tandis que l'eau latérale reſte en repos. En comparant le réſultat de cette théorie avec la quantité de l'écoulement, déterminée par l'expérience, Newton conclût que la vîteſſe au ſortir de l'orifice n'étoit dûe qu'à la moitié de la hauteur de l'eau dans le réſervoir. Mais il ſentit lui-même dans la ſuite que cette conſéquence ne pouvoit pas ſe concilier avec la hauteur à laquelle les jets d'eau s'élèvent naturellement. Il n'avoit pas vu d'abord l'effet de la contraction; il le vit dans ſa ſeconde édition qui parut en 1714. Sans abandonner le fond de ſa théorie, il regarda la ſection de la veine contractée comme le vrai orifice par lequel l'écoulement doit être cenſé ſe faire, & la vîteſſe en cet endroit comme dûe à la hauteur correſpondante de l'eau dans le réſervoir. Par ce moyen, la théorie devint plus conforme à l'expérience. Mais elle n'en parut pas pour cela établie aſſez ſolidement. Elle porte en effet ſur des principes arbitraires & nullement démontrés. La formation de la cataracte eſt contraire aux loix de l'Hydroſtatique, & à l'expérience, qui concourent

à faire voir que lorſqu'un vaſe donne de l'eau par une ouverture, toutes les particules ſe dirigent vers cette ouverture.

Dans cette Hiſtoire abrégée des Inventeurs, je ne compte ni M. Varignon qui n'a déterminé que d'une manière très-imparfaite la vîteſſe des écoulemens, ni M. Guglielmini qui dans ſa *meſure des eaux courantes*, & dans ſon Traité *ſur la nature des Fleuves*, excellent quant à la partie phyſique & pratique, n'a employé d'autre théorie que celle de Torricelli. Je n'ai pas parlé non plus du Traité de l'équilibre des Liqueurs de M. Paſcal, parce que cet Ouvrage, parfait dans ſon eſpèce, ne contient au fond que des preuves expérimentales de la preſſion égale des fluides en toutes ſortes de ſens.

Tel étoit à-peu-près l'état de l'Hydraulique, lorſque le célèbre M. Daniel Bernoulli, après avoir donné ſur ce ſujet quelques eſſais, imprimés parmi les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, mit au jour ſon *Hydrodynamique*, en 1738. Comme on ne connoît ni le nombre ni la figure des molécules fluides, & qu'il n'eſt par conſéquent pas poſſible de déterminer rigoureuſement

le mouvement de chacune d'elles en particulier, M. Bernoulli partage le fluide par masses qui se meuvent suivant la même loi. Il fait deux suppositions qui lui paroissent conformes à l'expérience, & propres à fonder une théorie générale & suffisamment exacte du mouvement des Fluides ; la première, que la surface d'un Fluide contenu dans un vase qui se vuide par une ouverture, demeure toujours horisontale ; la seconde, qu'en imaginant toute la masse fluide partagée en une infinité de tranches horisontales de même volume, ces tranches demeurent contigues les unes aux autres, & que tous leurs points s'abaissent verticalement avec des vîtesses qui suivent la raison inverse de leurs largeurs ou des sections horisontales du réservoir. Ensuite pour déterminer le mouvement d'une tranche quelconque, il employe le principe de la conservation des forces vives ; ce qui est permis. Car les tranches fluides agissent les unes sur les autres sans se choquer, & par degrés insensibles, à-peu-près comme des corps solides formant un même système, & agissant les uns sur les autres par des fils ou des leviers, se partagent une quantité détermi-

née de mouvement. Or on ſçait, quoiqu'on n'en ait pas cependant de démonſtration générale, que le principe en queſtion a lieu dans ces ſortes de cas. M. Bernoulli parvient ainſi à des ſolutions très-élégantes par la marche du calcul & par la ſimplicité des réſultats. Il applique les théorêmes généraux à des exemples choiſis; par-tout une profonde Science de l'analyſe; une Phyſique ſûre, puiſée dans la nature des choſes, employant le calcul au beſoin & jamais pour la pompe. En un mot, cet Ouvrage eſt une des plus belles & des plus ſages productions du génie Mathématique.

M. Maclaurin & M. Jean Bernoulli, trouvant que le principe de la conſervation des forces vives n'étoit pas aſſez direct pour ſervir de baſe à la théorie du mouvement des Fluides, réſolurent le problême par d'autres méthodes qu'ils crurent dériver plus naturellement des premières loix de la Méchanique. Ils parvinrent d'ailleurs aux mêmes réſultats que M. Daniel Bernoulli. Peut-être leurs méthodes ſont-elles même ſujettes à des difficultés aſſez graves. Mais cette diſcuſſion nous méneroit trop loin. Les recherches de

M. Maclaurin ſur ce ſujet parurent en 1742 dans ſon Traité des Fluxions ; & *l'Hydraulique* de M. Jean Bernoulli parut en 1743 dans le Recueil de ſes Ouvrages.

Il étoit réſervé à M. d'Alembert de porter dans la théorie de l'Hydrodynamique la même lumière dont il avoit éclairé la Méchanique des corps ſolides. Le principe général qu'il venoit de découvrir pour trouver le mouvement des corps ſolides qui agiſſent les uns ſur les autres, lui ſervit auſſi en 1744, dans ſon *Traité des Fluides*, à réſoudre de la manière la plus ſimple & la plus élégante, les problêmes qui concernent l'équilibre & le mouvement des Fluides. L'Auteur fait les mêmes ſuppoſitions que M. Daniel Bernoulli. A cela près, il établit ſon calcul tout autrement. Il conſidère à chaque inſtant le mouvement actuel d'une tranche, comme compoſé du mouvement qu'elle avoit dans l'inſtant précédent, & d'un mouvement qu'elle a perdu : les loix de l'équilibre entre les mouvemens perdus, lui donnent les équations qui repréſentent le mouvement du fluide. M. d'Alembert réſoud par-là avec facilité, non-ſeulement les problêmes des Au-

teurs qui l'ont précédé, mais il en donne un grand nombre d'autres qui ſont entièrement nouveaux & très-difficiles. Son Ouvrage eſt donc original à pluſieurs égards par le fond des choſes mêmes : il l'eſt du moins d'un bout à l'autre par la méthode que l'Auteur a employée ; méthode qui fera à jamais époque dans la ſcience du mouvement, dont elle réduit toutes les loix à celles de l'équilibre.

Quoique l'Hydrodynamique eût ainſi acquis un haut degré de perfection, elle étoit néanmoins aſtreinte à l'hypothèſe que les tranches du fluide conſervent leur parallélisme, ou que tous les points d'une même tranche ſe meuvent ſuivant une ſeule & même direction. Il étoit à déſirer qu'on pût exprimer par des équations le mouvement d'un point du fluide dans un ſens quelconque. M. d'Alembert trouva ces équations d'après ces deux principes ; qu'un canal rectangulaire, pris dans une maſſe fluide en équilibre, eſt lui-même en équilibre ; & qu'une portion du fluide, en paſſant d'un endroit à l'autre, conſerve le même volume lorſque le fluide eſt incompreſſible, ou ſe dilate ſuivant une

loi donnée lorſque le fluide eſt élaſtique. Il publia cette méthode très-profonde & très-ingénieuſe, dans ſon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, imprimé en 1752. Il l'a encore perfectionnée depuis dans ſes Opuſcules Mathématiques. Elle a été adoptée, à quelque choſe près, par M. Euler, (Mém. de l'Académie de Berlin, an. 1755, & Mém. de l'Académie de Pétersbourg, an. 1756). Ces deux illuſtres Géomètres ſemblent avoir épuiſé toutes les reſſources qu'on peut tirer de l'analyſe pour déterminer le mouvement des fluides. Malheureuſement leurs formules ſont ſi compoſées, par la nature de la choſe, qu'on ne peut les regarder que comme des vérités Géométriques, très-précieuſes en elles-mêmes ; & non comme des ſymboles propres à peindre l'image ſenſible du mouvement actuel & phyſique d'un fluide.

Il y a des ſciences qui, par leur objet, ne ſont deſtinées qu'à ſervir d'aliment à la curioſité ou à l'inquiétude de l'eſprit humain. Il en eſt d'autres qui doivent ſortir de cet ordre purement intellectuel pour s'appliquer aux beſoins de la Société. Telle eſt en particulier l'Hydrodynamique. La détermination

tion de la quantité de liqueur, qui s'écoule par une ouverture proposée, la recherche du mouvement des eaux dans des canaux creusés par l'art ou par la nature, la connoissance des forces que les fluides exercent par leur poids ou par leur choc, &c, sont des objets d'une utilité continuelle dans la pratique. Il est donc indispensable de perfectionner la science dont il s'agit; & s'il y a des questions où la Géométrie n'offre pour cela que des secours trop pénibles ou même impuissans, il faut tâcher de suppléer à son défaut par la voie de l'expérience. La chose n'est pas impossible. Des faits multipliés, analysés avec attention, & ramenés autant qu'il est possible à des loix générales, peuvent composer une espèce de théorie dépourvue, à la vérité, de la rigueur Géométrique, mais simple, lumineuse & usuelle. C'est dans cette vûe que j'ai entrepris le traité qu'on va lire. J'en avois formé le projet depuis plusieurs années. La place que j'occupois alors à l'Ecole du Génie m'imposoit le devoir d'enseigner aux jeunes Ingénieurs la méchanique des Fluides, qui est essentielle à leur état. Je leur dictois quel-

ques essais qui n'étoient pas destinés à devenir publics ; je sentois l'insuffisance de la théorie en plusieurs points ; & je voulois consulter l'expérience avant que de commencer un corps d'Ouvrage. Mes idées sur cet important objet furent goûtées par les hommes éclairés & zélés pour le bien, qui ont l'administration de l'Ecole du Génie. M. le Duc de Choiseul accorda des fonds pour faire des expériences. J'en fis, je méditai ; voici le fruit de ce travail.

Mon Ouvrage embrasse l'Hydrostatique & l'Hydraulique. J'ai cru devoir reprendre ainsi toute la matière par les premiers principes, afin de donner plus de clarté & de méthode à ce Traité, & afin de l'adapter plus spécialement aux besoins des Lecteurs que je cherche à instruire. Les notes qu'on trouvera à la suite de plusieurs Chapitres, sont destinées à approfondir certaines théories. J'en dirai quelque chose de plus ci-dessous. Commençons par rendre compte du texte.

Les loix primordiales de l'Hydrostatique, étant fort simples, fort connues, & ayant été confirmées d'ailleurs par une infinité d'expériences, il ne me restoit qu'à les dévelop-

per nettement, & avec un détail ſuffiſant pour en faciliter l'uſage. C'eſt à quoi je me ſuis attaché. La théorie que j'établis eſt fondée toute entière ſur ce principe, qu'une particule quelconque d'un fluide en équilibre eſt également preſſée dans tous les ſens. Je conſidère d'abord l'équilibre des fluides incompreſſibles. J'examine la poſition que doit prendre la ſurface de ces fluides dans des vaſes ſolides ou flexibles, & la preſſion qu'ils exercent contre les fonds & les parois des mêmes vaſes. J'expoſe la méthode générale pour trouver la figure que forme un vaſe flexible rempli d'une liqueur peſante, lorſque cette liqueur eſt parvenue à l'état d'équilibre. La même méthode, ſimplifiée par la nature du problême, me ſert à déterminer les épaiſſeurs qu'il convient de donner aux tuyaux de conduite, pour qu'ils puiſſent réſiſter à la preſſion des fluides ſtagnans. De-là je paſſe à l'équilibre des fluides élaſtiques. Après en avoir expoſé les propriétés générales, je conſidère celui de l'air en particulier. Je démontre la peſanteur & l'élaſticité de ce fluide; je cherche la loi ſuivant laquelle il ſe comprime ou ſe dilate à

raiſon des poids dont il eſt chargé. Viennent enſuite différentes applications de la théorie à la machine Pneumatique, au Baromètre, au Thermomètre, à l'aſcenſion de l'eau dans les Pompes, à la machine à Feu, &c. Je traite avec le même ſoin une autre théorie qui a pour objet l'équilibre des corps flottans, & qui appartient tout-à-la-fois à la Statique des corps ſolides, & à celle des fluides. L'équilibre dont il s'agit a lieu, lorſque le corps flottant & le fluide déplacé ont même poids, & que leurs centres de gravité ſont ſitués dans une même ligne verticale. Mais il peut avoir plus ou moins de conſiſtance, c'eſt-à-dire, être plus ou moins ſtable dans ſon état, ſelon la poſition reſpective que les deux centres de gravité propoſés occupent ſur la verticale. J'analyſe donc les cas où un corps dérangé de cette ſituation d'équilibre y retournera de lui-même, ou continuera à s'en éloigner. Les principes généraux ſont éclaircis par pluſieurs exemples. J'en fais l'application aux mouvemens de roulis & de tangage des vaiſſeaux.

L'Hydraulique ſe partage en différentes branches que je parcours ſucceſſivement,

comme j'ai fait pour l'Hydroſtatique. Ici l'expérience marche preſque par-tout à la ſuite de la théorie ; elle la confirme, l'éclaire, ou même la ſupplée en certains cas où le mouvement du fluide, par ſes irrégularités, ne donne aucune priſe à la Géométrie.

Je commence par examiner le mouvement de l'eau qui ſort d'un vaſe par une ouverture. Ce problême pris dans toute ſa généralité eſt très-difficile. Mais dans la pratique il eſt aſſez ordinaire que l'ouverture ſoit fort petite en comparaiſon de la largeur du réſervoir. Alors je prouve par le ſeul ſecours de la théorie, que la vîteſſe au ſortir de l'orifice eſt dûe à la hauteur du fluide dans le réſervoir au-deſſus du trou. D'après ce principe, je donne pour un vaſe entretenu conſtamment plein, & pour un petit orifice horiſontal, une équation ou formule générale qui contient la relation entre la quantité d'eau écoulée, le temps de l'écoulement, l'aire de l'orifice & la hauteur du réſervoir ; de manière que trois de ces choſes étant données, il eſt facile d'en conclure la quatrième. On trouve des réſultats ana-

logues pour les écoulemens des vases qui se vuident sans recevoir de nouvelle eau. Souvent le fluide sort par une ouverture latérale, comme par une vanne de moulin, une porte d'écluse, &c. En ce cas, toutes les molécules au sortir de l'orifice, n'ont pas la même vîtesse ; & le mouvement général du fluide est comme indéterminable à la rigueur. Mais si le trou n'est pas fort grand, on peut supposer, sans craindre d'erreur sensible, que la vîtesse de chaque particule est dûe à la hauteur de réservoir, qui lui répond. J'adopte cette hypothèse comme suffisante dans la plûpart des problêmes de pratique. Elle me sert à résoudre plusieurs questions concernant le mouvement des eaux qui sortent par des ouvertures latérales. Voilà pour les écoulemens qui se font avec une entière liberté, & sans que le mouvement du fluide dans l'intérieur du vase éprouve aucun obstacle. Mais quelquefois les réservoirs sont étranglés en certains endroits de la hauteur, ou bien ils sont traversés de diaphragmes percés de petits trous par lesquels le fluide est obligé de passer. Le mouvement du fluide est alors gêné, rallenti, & ne suit plus les loix que

nous venons d'exposer. Je donne encore des formules pour déterminer ces sortes d'écoulemens. Elles font voir combien il est essentiel d'éviter les étranglemens dans les pompes & dans les tuyaux de conduite. Je termine ces différentes recherches par la solution de quelques problêmes sur le mouvement des eaux qui s'échappent par de petites ouvertures, de vases mobiles entretenus constamment pleins ; problêmes qui peuvent avoir leur utilité, & propres d'ailleurs à exercer les Commençans.

A la théorie des écoulemens, je fais succéder celle des oscillations d'un fluide qui se balance dans un syphon quelconque. Je démontre que le syphon étant supposé cylindrique, ces oscillations sont isochrones entr'elles ; & j'assigne la longueur du pendule simple qui fait ses battemens dans le même temps.

Il reste maintenant à sçavoir si les fluides se meuvent réellement d'une manière conforme à la théorie. Le premier objet qui se présente à examiner, est le mouvement que les particules d'un fluide qui sort d'un vase par une ouverture, prennent dans l'intérieur

même du vaſe. Par le moyen d'un cylindre de verre, au fond duquel j'adaptois différens ajutages, j'ai vu que toutes les particules deſcendent d'abord verticalement, mais qu'à une certaine diſtance du trou, elles ſe détournent de leur première direction pour tendre vers lui de tous côtés. Elles ont donc néceſſairement vers ſes bords des mouvemens obliques qui ſubſiſtent pendant quelque temps. En conſéquence de ces mouvemens, la veine fluide doit s'amincir & former une eſpèce de conoïde tronqué, dont la plus grande baſe eſt l'orifice même, & la plus petite en eſt diſtante extérieurement, d'une certaine quantité. J'ai meſuré les dimenſions de ce conoïde avec le plus d'exactitude qu'il m'a été poſſible; il m'a paru que ſa hauteur eſt égale environ au raïon de l'orifice, & que ſes baſes ſont entr'elles environ dans le rapport de 3 à 2. En-delà du point de contraction, la veine prend la forme cylindrique ou priſmatique, & la conſerveroit ſi la peſanteur & la réſiſtance de l'air ne tendoient pas à la dénaturer. Je croyois d'abord, avec quelques Auteurs, que la meſure immédiate de la con-

traction pouvoit servir à déterminer avec une précision suffisante la quantité de l'écoulement. Mais l'expérience m'a convaincu du contraire. On sent en effet qu'une telle mesure est nécessairement incertaine. Car outre qu'on ne peut jamais répondre qu'on ait pris bien juste le diamètre de la veine, comment s'assurer qu'on l'a pris précisément à l'endroit où la veine cesse de se resserrer pour devenir cylindrique? Cet endroit est-il toujours fixe pour toutes sortes de hauteurs de réservoir & de grandeurs d'orifice? Le diamètre de la veine ne varie-t-il pas lui-même par ces deux causes? La contraction n'a-t-elle lieu que pour des orifices percés dans de minces parois, & n'affecte-t-elle pas, du moins avec quelques modifications, les écoulemens qui se font par des tuyaux? Enfin les effets des contractions ne doivent-ils pas être altérés par le frottement, qui est plus sensible vers les bords que vers le centre de l'orifice? Ces considérations m'ont déterminé à chercher directement par l'expérience les quantités d'eaux écoulées par des orifices quelconques.

M Mariotte a fait en ce genre plusieurs

expériences rapportées dans ſon Traité du mouvement des Eaux, auquel j'ai déja payé le tribut d'éloges qu'il mérite. Mais je ne les ai point employées. Pour mettre de l'uniformité dans mon travail, & pour me délivrer de tout ſcrupule ſur l'exactitude des réſultats, j'ai voulu opérer moi-même, & voir par mes yeux. J'ai déterminé les écoulemens par des orifices percés dans de minces parois, & par des tuyaux additionnels. La théorie avoit appris que les dépenſes d'un vaſe entretenu conſtamment plein, ſont comme le produit du temps par l'orifice & par la racine quarrée de la hauteur du réſervoir. L'expérience m'a fait voir que cette loi eſt ſenſiblement vraie, & qu'on peut l'employer ſans reſtriction dans la pratique ordinaire. Lorſque l'écoulement ſe fait par un orifice percé dans une mince paroi, la contraction diminue la dépenſe naturelle & théorique, à-peu-près dans le rapport de 16 à 10, ou de 8 à 5; & lorſque le fluide ſort par un tuyau additionnel de 2 ou 3 pouces de longueur, & ſuit les parois de ce tuyau, la dépenſe eſt diminuée dans le rapport de 16 à 13 environ. Les formules

de la théorie s'appliqueront donc à la pratique, en y faisant les corrections relatives à ces rapports. Si on veut mettre dans ces recherches toute l'exactitude possible, il faudra faire attention à deux phénomènes que j'ai observés. En analysant les effets du frottement & de la contraction, j'ai trouvé, 1°. qu'à cause du frottement les petits orifices donnent moins d'eau à proportion que les grands ; 2°. que la hauteur du réservoir augmentant, la contraction augmente, ce qui diminue la dépense ; tandis qu'au contraire, suivant la théorie la plus naturelle qu'on puisse se faire sur l'action du frottement, le déchet occasionné dans la dépense par cette résistance, devroit se sentir de moins en moins à mesure que la hauteur du réservoir augmente. Ces deux loix combinées ensemble me donnent le moyen de déterminer les écoulemens avec toute la précision qu'on peut desirer, soit pour des vases entretenus constamment pleins, soit pour des vases qui se vuident sans recevoir de nouvelle eau.

De-là je passe au mouvement des eaux jaillissantes. J'établis la meilleure figure des

ajutages, & la meilleure proportion entre le diamètre de l'ajutage & celui du tuyau qui doit fournir à ſa dépenſe. Il eſt aiſé, avec ces principes, de former un jet d'eau qui s'élève à toute la hauteur qu'on peut eſpérer. L'utilité de cette matière pour la décoration des jardins & des édifices, eſt ſuffiſamment connue.

Il arrive ſouvent qu'on a beſoin de conduire de l'eau d'un point à un autre qui en eſt très-éloigné, & qui en eſt quelquefois ſéparé par des montagnes & des vallées. Alors on fait cheminer l'eau dans des tuyaux de fer, de bois, de grès, ou de plomb. On commettroit des erreurs ſouvent énormes, ſi après s'être aſſuré par le nivellement que le point de départ eſt plus élevé que celui d'arrivée, on déterminoit le diamètre du tuyau par les principes qui ſervent à déterminer l'écoulement d'un fluide qui ſort d'un vaſe par une ouverture ordinaire, & qu'on négligeât la réſiſtance du frottement. Cette réſiſtance répandue ſur un long eſpace, rallentit d'une manière très-ſenſible le mouvement de l'eau. Le déchet qu'elle occaſionne dans la dépenſe, peut excéder 20 ou 30

fois la dépenſe même, quand la conduite eſt fort longue, & qu'elle a pluſieurs ſinuoſités. J'ai fait ſur cette matière un grand nombre d'expériences qui paroîtront intéreſſantes, ſi je ne me trompe, & dont j'eſpère que la pratique retirera pluſieurs avantages. Elles montrent que toutes choſes d'ailleurs égales, plus la hauteur du réſervoir eſt grande, moins le déchet occaſionné dans la dépenſe d'une longue conduite eſt ſenſible; ce qui eſt conforme à la ſaine théorie ſur la nature du frottement. Elles font connoître, du moins à-peu-près, la loi ſuivant laquelle les dépenſes diminuent à meſure qu'un tuyau devient plus long ou plus tortueux, ou l'un & l'autre tout-à-la-fois. On peut ſe faire par leur moyen une idée de la pente qu'il convient de donner à un tuyau rectiligne, pour que cette pente répare la perte de vîteſſe occaſionnée par le frottement. Elles fourniſſent la réponſe à cette queſtion, ſi lorſqu'on a de l'eau à conduire d'un point à un autre qui en eſt ſéparé par des montagnes & des vallées, il faut ou franchir directement les montagnes & les vallées, ou les contourner, en ſuppoſant que le dévelop-

pement de l'espace parcouru par l'eau soit le même dans les deux cas ? &c. Je ne puis qu'indiquer ici en gros tous ces objets qui demandent à être suivis dans l'Ouvrage même.

Le mouvement des eaux dans des canaux, offre un nouveau champ de recherches curieuses par elles-mêmes, & utiles dans la pratique. Je considère d'abord le mouvement de l'eau dans un canal rectangulaire. J'examine la loi suivant laquelle le frottement diminue la vîtesse du courant. Il y a une différence sensible entre le mouvement de l'eau dans un tuyau fermé de tous côtés & celui de l'eau dans un canal. Sous une même hauteur de réservoir, il passe toujours la même quantité d'eau dans un canal, quelles que soient sa pente & sa longueur ; au lieu que dans un tuyau la pente & la longueur font varier la dépense. Mes expériences prouvent que les vîtesses ne suivent point la raison des racines des pentes, comme quelques Auteurs l'ont avancé. Elles réfutent aussi l'opinion de ceux qui pensent qu'à égale pente & à égale longueur de canal, les vîtesses sont entr'elles comme les quantités d'eaux

écoulées. J'expoſe à la ſuite de ces recherches les moyens que divers Auteurs ont imaginés pour déterminer la vîteſſe des eaux dans des canaux de figure quelconque, comme des rivières, des ruiſſeaux, &c.

L'enchaînement & l'analogie des choſes me conduiſent ici naturellement à ſuivre en particulier & avec quelque détail le cours des fleuves. Je donne d'abord toute la théorie élémentaire dont le ſujet eſt ſuſceptible. On ſçait que quand on retrecit le lit d'une rivière par les arches d'un pont, par des murs de quai, ou de toute autre manière qu'on voudra imaginer, la profondeur de l'eau augmente néceſſairement. Je détermine cette nouvelle profondeur. La même méthode me ſert à réſoudre un autre problême qui eſt en quelque ſorte l'inverſe du précédent, & qui conſiſte à trouver la quantité dont le niveau d'une rivière baiſſe, lorſqu'on y fait une ſaignée par un canal de dérivation. J'entre dans pluſieurs détails phyſiques & géométriques ſur la manière dont les rivières creuſent & établiſſent leurs lits. Cela me donne lieu de dire un mot ſur la formation des *barres*, & ſur les moyens

d'empêcher qu'elles ne deviennent trop nuisibles à la navigation. Je discute en quel cas il est avantageux ou non de faire des saignées à une rivière, pour diminuer les inondations dans les campagnes voisines, lorsqu'elle vient à augmenter, ou par les pluies, ou par la fonte des neiges, ou par l'affluence de quelque torrent. Des Auteurs modernes sont tombés à ce sujet dans des erreurs que je relève.

Après avoir considéré le mouvement des eaux en lui-même, je cherche la force dont il peut être capable, quand un fluide va choquer quelque corps, quelqu'obstacle opposé à son courant. Cette matière est hérissée de difficultés. J'explique d'abord la théorie ordinaire qu'on employe pour la traiter, & j'en fais l'application à des exemples variés. Suivant cette théorie, la percussion perpendiculaire d'un fluide contre un plan, est comme le produit de la surface choquée, par le quarré de la vîtesse du fluide; & la percussion oblique est comme le produit de la surface choquée, par le quarré de la vîtesse du fluide, & par le quarré du sinus de l'angle d'incidence. L'expérience m'a appris

que

que la première propofition eft fenfiblement vraie ; mais que la feconde s'éloigne de plus en plus de la vérité à mefure que la percuffion devient plus oblique. J'expofe les réfultats des expériences faites fur ce fujet, par de fçavans Géomètres, & leurs tentatives pour foumettre le problême à une théorie plus rigoureufe & plus exacte que la précédente.

On doit regarder comme une partie effentielle de la Science qui nous occupe, la recherche des meilleurs moyens d'employer l'action d'un fluide pour mouvoir une machine. Ces moyens confiftent à tranfmettre la force de l'eau à la machine, avec des roues qui font mues par le choc ou par le poids de l'eau, quelquefois par ces deux agens réunis. Je traite donc en premier lieu des roues mues par le choc de l'eau. Je cherche le nombre d'aîles qu'il convient de donner à une roue relativement à fon diamètre, à la quantité dont elle trempe dans l'eau & à la vîteffe du courant. Plufieurs Auteurs fe font trompés fur cette matière. Les uns négligeant dans leur calcul des élémens effentiels à la queftion, ont

trop limité le nombre des aîles ; les autres en voulant réfuter cette détermination, & mesurant mal eux-mêmes l'impulsion du fluide, sont tombés dans l'extrémité opposée. On trouvera ici, ce me semble, les vrais principes qui doivent servir à résoudre le problême dans chaque cas particulier. Je les confirme par un grand nombre d'expériences. Il est quelquefois nécessaire de connoître la meilleure proportion entre la hauteur & la largeur d'une aîle. J'indique la manière de trouver cette proportion. On croit depuis long-temps, que pour rendre l'effet de la machine le plus grand qu'il est possible, la roue doit prendre le tiers de la vîtesse du courant. Mais on n'a jamais considéré, dans la solution de ce problême, que l'impulsion du fluide contre une seule aîle, quoiqu'il puisse y avoir, & qu'il y ait ordinairement plusieurs aîles choquées à-la-fois. L'expérience m'a fait voir que les deux vîtesses doivent être entr'elles dans le rapport de 2 à 5 environ. Je passe ensuite aux roues mues par le poids de l'eau. Ces roues sont garnies, comme on sçait, de pots ou augets qui après avoir reçu une certaine quantité d'eau,

la conſervent dans la ſuite, parce qu'il en entre ſans ceſſe autant par en-haut qu'il s'en perd par en bas. La vîteſſe de la roue étant parvenue à l'uniformité, & étant ſuppoſée la même que celle de l'eau du canal, de manière que l'eau agiſſe ſimplement par le poids & nullement par le choc, je fais voir que la roue produit d'autant plus d'effet qu'elle tourne plus lentement. La même concluſion a lieu encore quand la roue eſt mue tout-à-la-fois par le choc & par le poids de l'eau. Je rapporte quelques expériences qui viennent à l'appui de cette théorie.

Il n'a été queſtion juſqu'ici que du mouvement des fluides incompreſſibles, & ſurtout de l'eau. Je conſidère à part le mouvement des fluides élaſtiques. Je détermine la vîteſſe avec laquelle l'air ſort d'un vaſe par une ouverture, & paſſe dans le vuide ou dans un air plus rare. Ces problêmes s'appliquent à la machine Pneumatique & aux Pompes.

Telles ſont en abrégé les principales matières que j'ai traitées dans la partie élémentaire de mon Ouvrage. Mais comme pluſieurs queſtions m'ont paru mériter d'être

approfondies par la théorie, je remplis cet objet dans des notes que l'ordre & la clarté m'ont obligé de renvoyer à la fin des Chapitres auxquels elles répondent. Les notes dont l'Hydroſtatique eſt ſemée, concernent la figure des planetes en tant qu'originairement fluides, celle des vaſes flexibles, les oſcillations des corps flottans, que je détermine avec toute la généralité que le problême admet, & dont je fais l'application aux mouvemens de roulis & de tangage des vaiſſeaux, ſoit que ces mouvemens exiſtent ſéparément, ſoit qu'ils ſe combinent entr'eux & avec un mouvement de rotation horiſontale. Dans les notes ſur l'Hydraulique, je donne la théorie du mouvement des fluides avec le même degré de préciſion auquel les Géomètres ont pu atteindre juſqu'ici; & je n'oublie rien pour mettre de la ſimplicité & de l'uniformité dans mes calculs. Je crois que cette branche de mon Livre paroîtra nouvelle à quelques égards. On y trouvera, par exemple, la détermination générale de l'effet des roues à aîles; problême épineux, qui n'avoit encore été réſolu que dans un cas très-particulier.

Il ne m'appartient pas d'apprécier moi-même mon travail. Le Public me jugera. Quel que ſoit ſon arrêt, il verra du moins qu'en préſentant mes propres recherches, je n'ai laiſſé échapper aucune occaſion de rendre juſtice aux découvertes des Auteurs qui m'ont précédé dans la même carrière.



EXTRAIT des Registres de l'Académie Royale des Sciences.

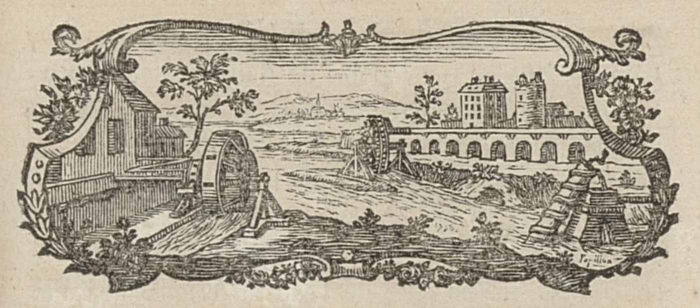
Du 4 Février 1767.

MESSIEURS D'ALEMBERT & l'Abbé NOLLET, qui avoient été nommés pour examiner un Traité *d'Hydrodynamique*, par M. l'Abbé BOSSUT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet ouvrage digne de l'impression. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 24 Novembre 1770.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Le Privilége est aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences.

TRAITÉ



TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'HYDRODYNAMIQUE.

Définitions & Notions générales.

1. L'HYDRODYNAMIQUE eſt en général une Science qui a pour objet les loix de l'équilibre & du mouvement des fluides. La partie de cette Science, qui conſidère l'équilibre des fluides, ſe nomme *Hydroſtatique ;* & celle qui conſidère leur mouvement, ſe nomme *Hydraulique*.

2. On appelle *fluide*, un amas de molécules très-déliées, indépendantes les unes des autres, & parfaitement mobiles en toutes ſortes de ſens. Tels ſont le vin, l'eau, le mercure, l'air, la vapeur de l'eau, la flamme, &c.

3. Je conſidère, dans cette définition, les fluides comme doués d'une parfaite fluidité; mais, phyſique-

ment parlant, il n'y a point de fluides dont les parties ne ſoient adhérentes les unes aux autres avec une certaine force qui n'eſt pas la même dans tous, & qui peut varier dans un même fluide par le chaud, par le froid, ou par d'autres cauſes phyſiques. Nous avons ſans ceſſe ſous les yeux des preuves de cette adhérence. Si l'on jette de l'eau ſur le plancher, les molécules, en s'éparpillant, ont de la peine à ſe ſéparer; lorſqu'on laiſſe tomber un fluide goutte à goutte, on voit que les parties forment une eſpèce de filet plus ou moins ſenſible; pluſieurs globules de mercure qui viennent à ſe toucher, s'uniſſent enſemble, & paroiſſent ne plus former qu'un même tout, &c. Il eſt vraiſemblable que la qualité dont il s'agit, eſt produite par l'aſpérité des parties fluides, combinée avec l'attraction réciproque qu'elles exercent les unes ſur les autres. Mon but n'eſt pas d'approfondir cette queſtion, ni d'examiner en quoi conſiſte la nature de la fluidité, ni quelle peut être la figure des molécules fluides, ni ſi ces molécules ont, par quelque cauſe ſecrette, ce qu'on appelle un mouvement *inteſtin*, indépendant de ceux que la peſanteur ou d'autres forces connues peuvent leur communiquer. J'abandonne aux Phyſiciens toutes ces recherches ſur leſquelles on ne peut guères propoſer que des conjectures.

4. Quelques Auteurs diſtinguent la liquidité d'avec la fluidité, comme l'eſpèce d'avec le genre. Selon eux, un corps eſt fluide lorſque ſes parties ne ſont pas liées entr'elles, qu'elles cèdent facilement au toucher, & qu'elles ſe répandent comme d'elles-mêmes

En ce ſens, le ſable fin, la cendre, un amas de menus grains, &c. ſont des fluides. Mais, ajoutent-ils, pour qu'un corps ſoit liquide, il faut de plus que ſes parties ſoient tellement mobiles, & ſe balancent tellement par leur poids, que ſi elles ſont en ſuffiſante quantité, elles ſe répandent & forment une ſurface horizontale. Nous n'admettrons pas cette diſtinction; & pour nous conformer à l'uſage le plus généralement reçu, nous confondrons la liquidité avec la fluidité; de maniere qu'ayant à déſigner une liqueur, on l'appellera indiſtinctement *liqueur* ou *fluide*. Il n'eſt queſtion dans ce Traité que des fluides proprement dits, & nullement des fluides imparfaits, tels que ſont le ſable, la cendre, &c.

5. Comme il ſera ſouvent parlé dans la ſuite de *maſſe*, *volume*, *denſité*, &c; je vais fixer ici en peu de mots les idées qu'il faut ſe faire de ces quantités, pour n'être pas obligé de couper le fil du diſcours par des définitions & des notions étrangères en quelque ſorte à mon objet principal.

6. La maſſe d'un corps, ſoit ſolide, ſoit fluide, eſt la quantité de matière propre dont ce corps eſt composé. Elle ſe connoît par le poids; enſorte que ſi l'on a, par exemple, deux corps *A* & *B*, dont le premier peſe deux ou trois fois autant que le ſecond, le premier a deux ou trois fois autant de maſſe que le ſecond.

Cette proportionnalité des poids aux maſſes eſt démontrée par l'expérience qui apprend que dans un même eſpace vuide d'air, ſous le récipient de la machine pneumatique, tous les corps, quelque diffé-

rence qu'il y ait dans leurs figures & dans leurs dimensions, tombent avec la même vîteſſe : car on ſçait, par les premiers principes de la Méchanique, que lorſque les vîteſſes de deux mobiles ſont égales, les forces motrices ſont néceſſairement proportionnelles aux maſſes de ces mobiles qu'elles animent.

7. Le volume d'un corps eſt l'eſpace que ce corps occupe. Il ſe détermine par les régles que la Géométrie preſcrit pour le toiſé de l'étendue.

8. Il eſt évident que ſi toutes les molécules élémentaires dont un corps eſt composé, ſe touchoient immédiatement ſans laiſſer entr'elles aucun vuide, ou que ſi du moins tous les corps étoient également poreux, & que leurs parties intégrantes fuſſent égales & ſemblablement arrangées entr'elles, il ſeroit inutile de diſtinguer la maſſe du volume : le volume repréſenteroit la maſſe, ou la maſſe le volume, ſuivant l'exigence des cas. Mais il s'en faut beaucoup que les choſes ne ſoient ainſi. Tous les corps ſont poreux, & tous ne le ſont pas de la même manière. Ils ne contiennent donc pas tous la même quantité de matière ſous le même volume. Ainſi, par exemple, deux lingots, l'un d'or, l'autre d'argent, qui ont exactement la même figure & les mêmes dimenſions, ne peſent pas également ; leurs peſanteurs, & par conſéquent auſſi leurs maſſes, ſont à peu près entr'elles comme les nombres 19 & 10. Pareillement un pied cube de mercure & un pied cube d'eau ont des peſanteurs ou des maſſes très-inégales ; la première eſt environ 14 fois auſſi grande que la ſe-

conde, &c. Or, ſelon qu'un corps contient plus ou moins de maſſe ſous un volume donné, il eſt appellé plus ou moins *denſe*.

9. De là réſulte la notion de la *denſité* qu'on doit regarder comme le rapport du nombre des *meſures* de la maſſe, au nombre des *meſures* du volume; ou ce qui revient au même, comme *la maſſe compriſe ſous l'unité de volume*.

J'entends par les *meſures* de la maſſe, les livres, marcs, onces, &c, que la maſſe peſe; & par les *meſures* du volume, les pieds cubes, pouces cubes, lignes cubes, &c, qui compoſent le volume. Dans chaque eſpèce de meſures, il faut prendre à volonté une unité fondamentale à laquelle on comparera toutes les autres. Ainſi, par exemple, dans les meſures du poids ou de la maſſe, on pourra prendre l'once pour unité fondamentale; les parties qui ſont au-deſſous de l'once en ſeront des fractions. Dans les meſures du volume, on pourra prendre le pouce cube pour l'unité; les parties au-deſſous, ſeront des fractions du pouce cube.

10. Donc ſi l'on a deux maſſes A & B, dont les volumes ou grandeurs ſoient exprimées par G & γ, les denſités par D & δ, on aura $D : \delta :: \frac{A}{G} : \frac{B}{\gamma}$, proportion de laquelle on tire, $A : B :: GD : \gamma\delta$, c'eſt-à-dire que *les maſſes ſont entr'elles en raiſon compoſée des volumes & des denſités*.

11. *Lorſque les maſſes ſont égales, les denſités ſont en raiſon inverſe des volumes*; car alors on a $GD = \gamma\delta$, & par conſéquent $D : \delta :: \gamma : G$.

12. On voit aſſez que la denſité eſt une quantité purement relative, c'eſt-à-dire, qu'un corps n'eſt appellé *denſe* que par la comparaiſon exprimée ou ſouſentendue, qu'on en fait avec un autre corps. Cependant on s'énonce quelquefois comme ſi la denſité repréſentoit un être abſolu ; & on dit en conſéquence que *la denſité eſt égale au quotient de la maſſe diviſée par le volume*, ou que *la maſſe eſt égale au produit du volume par la denſité*. Ces propoſitions entendues dans leur vrai ſens, ſe réduiſent aux deux proportions de l'article 10.

13. Lorſque l'on conſidére ſimplement le poids d'un corps en lui-même, ſans s'embarraſſer du volume ſous lequel il eſt contenu, on l'appelle *poids abſolu*, ou plus ordinairement *peſanteur abſolue* du corps en queſtion.

14. Mais on a très-ſouvent beſoin de connoître le poids d'une certaine matière, ſous un volume *donné*. Ce poids eſt ce qu'on appelle *la peſanteur ſpécifique* de la matiere propoſée. On voit donc en général que la peſanteur ſpécifique d'un corps eſt le rapport du nombre des meſures du poids abſolu de ce corps, au nombre des meſures de ſon volume ; ou ce qui revient au même, *le poids compris ſous l'unité de volume*.

15. Il ſuit de-là que ſi l'on a deux corps dont les poids abſolus ſoient P & π, les peſanteurs ſpécifiques p & ϖ, les volumes G & γ, on aura la proportion, $p : \varpi :: \frac{P}{G} : \frac{\pi}{\gamma}$, de laquelle on tire, $P : \pi :: Gp : \gamma\varpi$, c'eſt-à-dire que *les peſanteurs abſolues ſont entr'elles en raiſon compoſée des volumes & des peſanteurs ſpécifiques.*

16. *Lorſque les peſanteurs abſolues ſont égales, les*

pesanteurs spécifiques sont en raison inverse des volumes ; car alors $Gp = \gamma \varpi$, & par conséquent $p : \varpi :: \gamma : G$.

17. Je n'ai pas besoin d'avertir qu'il faut faire au sujet des pesanteurs spécifiques la même remarque qu'on a faite (12) au sujet des densités. Lorsqu'on dit que *la pesanteur spécifique est égale au quotient de la pesanteur absolue divisée par le volume*, ou que *la pesanteur absolue est égale au produit du volume par la pesanteur spécifique*, ces énoncés se réduisent, quant au fonds, aux deux proportions de l'article 15. On comprendra par-là le vrai sens d'une expression qui reviendra souvent dans la suite. Ayant à désigner le poids absolu d'un corps dont le volume est connu ou déterminable par les conditions de quelque problême, nous réduirons ce volume en mesures connues, par exemple, en pieds cubes, & nous multiplierons le nombre de pieds cubes qu'il contient par le poids absolu d'un pied cube de la même matiere (poids que nous regarderons comme sa pesanteur spécifique); ce qui donnera évidemment le poids absolu du corps proposé : nous dirons alors que ce poids est égal au produit de sa pesanteur spécifique par son volume. Quand on aura ainsi choisi le volume sous lequel on mesure la pesanteur spécifique, il faudra se servir de la même unité dans toutes les comparaisons qu'on pourra faire des poids absolus de différens corps, pour un même objet.

18. Puisque les masses sont proportionnelles à leurs poids (6), il est clair que les densités sont proportionnelles aux pesanteurs spécifiques ; car les densités sont des masses comprises sous des volumes égaux, & les

peſanteurs ſpécifiques ſont des poids compris auſſi ſous des volumes égaux.

19. Il eſt à remarquer que dans les notions que je viens de donner des denſités & des peſanteurs abſolue & ſpécifique, je ſuppoſe que les corps ſont placés dans un même endroit de la terre, ou du moins à la même latitude. Mais ſi l'on conſidéroit, par exemple, deux maſſes A & B, dont la premiere fût placée au pole, la ſeconde à l'équateur, il y auroit quelques changemens à faire dans les réſultats précédens; car on ſçait qu'à cauſe de la force centrifuge qui naît de la rotation du globe terreſtre, & qui diminue la gravité naturelle, les corps, ſous l'équateur, ſont d'environ $\frac{1}{289}$ moins peſans que ſous le pole; d'où il ſuit que la maſſe A n'eſt pas à la maſſe B, comme le poids abſolu de A ſous le pole eſt au poids abſolu de B ſous l'équateur; mais ſi l'on nomme A' le premier poids, B' le ſecond, on a ſenſiblement, $A : B :: A' : B' + \frac{B'}{288}$. Les maſſes ſont ainſi meſurées par des poids conſidérés dans le même endroit. Donc ſi l'on nomme D & δ les denſités; p & ϖ les peſanteurs ſpécifiques au pôle & à l'équateur, c'eſt-à-dire, les poids de volumes égaux, conſidérés l'un au pôle, l'autre à l'équateur; on aura $D : \delta :: p : \varpi + \frac{\varpi}{288}$. Les denſités ſont donc en général proportionnelles aux peſanteurs ſpécifiques, pourvû que l'on conſidére les peſanteurs ſous le même parallele, ou que du moins on les réduiſe aux valeurs qu'elles ont ſous le même parallele.

20. Nous ferons une autre remarque plus eſſentielle à notre ſujet. Tous les corps ſont peſans, comme on ſçait; mais on peut dépouiller par la penſée un corps de ſa peſanteur; on y eſt même ſouvent obligé. Cette abſtraction eſt d'autant plus permiſe, que réellement l'effet de la peſanteur eſt anéanti en pluſieurs cas. Par exemple, lorſqu'on meut un corps ſur un plan horiſontal, le mouvement eſt le même, toute réſiſtance miſe à part, que ſi la peſanteur n'exiſtoit pas; dans un corps ſuſpendu à un point fixe par un fil, l'effet de la peſanteur eſt encore nul, &c. Il faut donc habituer l'eſprit à regarder la maſſe en elle-même, en faiſant abſtraction de toute peſanteur. Par-là on évitera une erreur dans laquelle on tombe ſouvent. Cette erreur conſiſte à regarder l'inertie, c'eſt-à-dire, la réſiſtance que les corps oppoſent à leur changement d'état, ſoit de repos, ſoit de mouvement, comme un effet de la peſanteur. La force d'inertie eſt une propriété eſſentielle à la matière. Tout corps réſiſte, par ſon indifférence au repos ou au mouvement, à paſſer de l'un de ces états à l'autre; & il réſiſte d'autant plus qu'il contient plus de parties, ou qu'il a plus de maſſe. Il n'eſt jamais poſſible, quelques moyens qu'on employe, de dépouiller un corps de ſon inertie, ou de ſuſpendre l'effet de cette force; en quoi elle differe eſſentiellement de la peſanteur. Ces deux forces ſont donc indépendantes l'une de l'autre. Il eſt vrai que chacune d'elles eſt proportionnelle à la maſſe; mais la proportionnalité de l'inertie à la maſſe eſt néceſſairement vraie, au lieu que la proportionnalité du poids à la

masse n'est vraie que d'une vérité purement expérimentale.

Telles sont les notions générales que nos Lecteurs doivent se rendre très-familières. Je ne rapporte point ici plusieurs propositions sur l'équilibre & le mouvement dont je ferai usage. Je les emprunterai de la Méchanique ; ou je les démontrerai, s'il est nécessaire, chacune en leur lieu.





PREMIERE PARTIE.

ÉLÉMENS D'HYDROSTATIQUE.

21. L'HYDROSTATIQUE a pour objet, comme nous l'avons dit (1), les loix de l'équilibre des fluides. Or cet équilibre eſt produit par la deſtruction des forces qui agiſſent ou ſur les parties mêmes du fluide, ou ſur les parois du vaſe, ou ſur les corps ſolides qui peuvent être plongés dans les fluides. L'examen de tous ces efforts fera la matière de cette première partie. Nous ſuppoſerons que les fluides ſont homogènes, c'eſt-à-dire compoſés, dans toute leur étendue, de parties élémentaires ſemblables & également peſantes.

22. Les fluides en général peuvent ſe diviſer en deux eſpéces, en fluides incompreſſibles, & en fluides compreſſibles ou élaſtiques. Du premier genre ſont l'eau, le vin, &c, comme il eſt prouvé par l'expérience. Du ſecond ſont l'air, la flamme, la vapeur de l'eau, &c. Sans examiner ſi les expériences par leſquelles on établit l'incompreſſibilité ou l'élaſticité des fluides ſont exactes ou non, nous obſerverons que la nature ne poſe pas des limites parfaitement déterminées entre les différentes claſſes de corps : elle ne fait ni corps parfaitement durs, ni corps parfaitement élaſtiques ; mais il eſt avantageux d'établir ces ſortes de

diſtinctions dans nos recherches, pour découvrir plus facilement & plus clairement les propriétés qui dépendent de l'incompreſſibilité & de l'élaſticité.

Loi fondamentale de l'équilibre des fluides.

23. *Lorſqu'une maſſe fluide eſt en équilibre; de quelques forces que ſes parties puiſſent être animées, une particule quelconque eſt également preſſée en toutes ſortes de ſens.*

Car puiſque toutes les particules du fluide ſont indépendantes les unes des autres, & parfaitement mobiles en toutes ſortes de ſens (2), il eſt viſible que ſi la particule propoſée étoit moins preſſée d'un côté que d'autre, elle ſe mouvroit néceſſairement du côté où ſeroit la moindre preſſion, & qu'il n'y auroit plus d'équilibre dans le ſyſtême; ce qui eſt contraire à l'hypothèſe. Cette loi eſt démontrée d'ailleurs par l'expérience; car ſi à la même profondeur d'un fluide contenu dans un vaſe, on fait aux parois une ouverture, & qu'à cette ouverture on applique un piſton pour empêcher l'écoulement, ce piſton ſera repouſſé par le fluide avec la même force, ſoit que l'ouverture ſoit horiſontale, ou inclinée d'une manière quelconque à l'horiſon. Tout cela eſt également vrai pour les fluides incompreſſibles & pour les fluides élaſtiques. Il peut ſe faire phyſiquement qu'à cauſe de l'adhérence réciproque des particules, l'équilibre ſubſiſtât, quand

même une particule feroit un peu moins preffée d'un côté que d'autre; mais cette inégalité de preffion ne peut qu'être extrêmement petite ; & la propofition énoncée eft rigoureufement vraie pour les fluides dans l'état de fluidité parfaite, tels que nous les confidérons ici.

24. Il n'eft pas moins clair que *fi réciproquement chaque particule eft également preffée en toutes fortes de fens, tout le fyftême eft en équilibre.*

Les loix particulieres de l'équilibre des fluides incompreffibles ou compreffibles dépendent de la même loi primordiale que nous venons d'établir. Nous pourrions donc les développer enfemble; mais pour plus de clarté, nous confidérerons féparément l'équilibre des fluides incompreffibles, & celui des fluides élaftiques.

CHAPITRE PREMIER.

De l'équilibre des fluides incompreffibles.

25. IL n'eft pas néceffaire de définir en forme les fluides incompreffibles. On comprend par le mot même, qu'une quantité déterminée d'un fluide de cette efpèce occupe toujours le même efpace, & n'eft fufceptible ni d'expanfion, ni de contraction.

26. Les vafes qui contiennent les liqueurs peuvent être folides ou flexibles, c'eft-à-dire, ou conferver

conſtamment la même figure par la réſiſtance de leurs parois, ou bien être ſuſceptibles de changer de figure, & de prendre celle que demande l'équilibre entre les différentes forces qui agiſſent ſur le fluide. Lorſque je me ſervirai ſimplement du mot *vaſe*, j'entendrai toujours un vaſe ſolide, à moins que je n'avertiſſe, ou que le ſens du diſcours ne faſſe voir, qu'il eſt queſtion d'un vaſe flexible.

PROPOSITION I.

Fig. 1. 27. *Si à tous les élémens égaux* A, B, C, D, E, &c, *de la ſurface d'une maſſe fluide* A O K F *non peſante*, *ſont appliquées perpendiculairement des puiſſances égales* P, Q, R, S, T, &c, *qu'on peut imaginer agir par le moyen d'autant de piſtons : ces puiſſances ſont en équilibre.*

Car les efforts des puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *&c*, ſe tranſmettent librement, & de la même maniere, à travers la maſſe dont toutes les parties ſont parfaitement mobiles (2); & il n'y a pas de raiſon pour que l'une de ces puiſſances l'emporte ſur l'autre. Donc la maſſe fluide ne peut changer ni de figure, ni de place, & les puiſſances propoſées ſont néceſſairement en équilibre.

COROLLAIRE I.

28. Il eſt clair que ſi au lieu de ſuppoſer que les élémens *A*, *B*, *C*, *D*, *&c*, ſont égaux, & que les puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S*, *&c*, ſont égales, on ſuppoſe que les puiſſances ſont proportionnelles aux élémens, ou qu'on ait cette ſuite de rapports égaux, *P* : *Q* : *R* :

$S : \&c :: A : B : C : D : \&c$; il eſt évident, dis-je, que tout le ſyſtême ſera encore en équilibre ; car ſi l'on regarde, par exemple, l'élément *A* comme l'unité de meſure des élémens de la ſurface du fluide, & la puiſſance *P* comme l'unité de preſſion à cette même ſurface : qu'enſuite on ſuppoſe que chacun des élémens *B*, *C*, *D*, *&c*, eſt double, triple, ou en général multiplie un nombre quelconque *n* de fois de l'élément *A* : on pourra regarder pareillement chacune des puiſſances *Q*, *R*, *S*, *&c*, comme compoſée de deux, trois, ou généralement de *n* puiſſances égales à la puiſſance *P*, & appliquées chacune à chacune des parties égales des élémens *B*, *C*, *D*, *&c* ; ce qui revient au cas précédent.

COROLLAIRE II.

29. Soit *m* une molécule quelconque priſe dans tel endroit de la maſſe qu'on voudra. Quel que ſoit cet endroit, il eſt clair qu'à cauſe de la parfaite mobilité des particules fluides, qui permet aux puiſſances *P*, *Q*, *R*, *&c*, de tranſmettre librement leur action à travers la maſſe, la particule *m* eſt preſſée de la même maniere que ſi elle étoit placée immédiatement à la ſurface du fluide ; & en la regardant elle-même comme une petite maſſefl uide, on voit qu'elle doit être preſſée perpendiculairement & également dans tous les points de ſa ſurface, pour demeurer en équilibre. Donc ſi l'on conçoit ſa ſurface partagée en un certain nombre de parties égales dont chacune ſoit, par exemple, à l'élément *A*, comme le nombre *q* eſt au nom-

bre r; la preſſion ſoufferte par chacune des parties dont il s'agit, ſera repréſentée par $\frac{q}{r} \times P$.

COROLLAIRE III.

Fig. 2. 30. Suppoſons une liqueur non peſante, enfermée de tous côtés dans un vaſe *ABCD*, & qu'on faſſe à ce vaſe une ouverture quelconque *X* à laquelle ſoit appliquée une puiſſance *P*; cette force ſe communiquera librement en toutes ſortes de ſens à tous les points de la maſſe; & ſi l'on conçoit que les fonds & les parois du vaſe ſont partagés en un certain nombre d'élémens qui ayent à l'ouverture *X* un rapport donné, chacun d'eux ſouffrira une preſſion qui ſera à la puiſſance *P* dans le même rapport; car les fonds & les parois font par leur réſiſtance la fonction des puiſſances *Q*, *R*, *S*, &c, (Fig. 1).

COROLLAIRE IV.

Fig. 3. 31. La liqueur étant toujours enfermée de tous côtés comme ci-deſſus, ſuppoſons qu'on faſſe au vaſe *ABCD* un nombre quelconque d'ouvertures *X*, *M*, *N*, & qu'à ces ouvertures ſoient appliquées des puiſſances *P*, *Q*, *R*, telles que l'on ait, $P : Q : R :: X : M : N$; on voit par ce qui précéde, que ces puiſſances ſont en équilibre.

COROLLAIRE V.

32. La preſſion que ſouffre une particule quelconque *m* (Fig. 2 & 3) ſe meſure comme dans l'article

29,

29, c'eſt-à-dire, que ſi l'on nomme $\frac{q}{r}$, le rapport d'une partie de la ſurface de la molécule *m*, à l'ouverture *X*; la preſſion ſoufferte par la partie propoſée a pour expreſſion $\frac{q}{r} \times P$.

PROPOSITION II.

33. *La ſurface d'une liqueur abandonnée à l'action libre de la peſanteur & en équilibre dans un vaſe* AMNE *qui la contient, eſt horiſontale, ou perpendiculaire à la direction de la peſanteur.* Fig. 4.

DÉMONSTRATION.

Suppoſons pour un moment que la ſurface de la liqueur ait la courbure *ABDE*. Conſidérons la particule quelconque *B*, priſe à la ſurface, & décompoſons ſa peſanteur *Bf* en deux autres forces *Bt*, *Bg* dirigées ſuivant les élémens contigus *Bt*, *Bg* de la courbe. On ſçait par les principes de la Statique, & cela eſt d'ailleurs évident par ſoi-même, que ſi pluſieurs forces ſe font mutuellement équilibre, elles ſe détruiſent néceſſairement en toutes ſortes de ſens. Ainſi les forces *Bt*, *Bg* doivent être égales aux forces que les particules voiſines exercent contre la particule *B*, dans les ſens oppoſés *tB*, *gB*. Or d'un autre côté la particule *B* ne peut pas être en équilibre, à moins qu'elle ne ſoit également preſſée en toutes ſortes de ſens (23). Donc les forces *Bt*, *Bg* ſont égales; ce qui demande néceſſairement que l'angle *tBg* formé par les deux élémens *Bt*, *Bg* de la courbe

ſoit diviſé en deux parties égales par la direction de la peſanteur. Et comme cela doit avoir lieu pour tous les points de la ſurface du fluide, il faut évidemment que cette ſurface ſoit horiſontale, ou par-tout perpendiculaire à la direction de la peſanteur. C. Q. F. D.

REMARQUE.

34. La propoſition précédente s'étend à toutes ſortes d'hypothèſes de peſanteur, c'eſt-à-dire, que de quelques forces que les parties d'un fluide puiſſent être animées, la ſurface de ce fluide doit couper perpendiculairement les directions des forces qui agiſſent immédiatement ſur cette même ſurface. Mais nous ne conſidérons pas ici la queſtion ſous un point de vûe ſi général. Nous nous bornons à la loi de peſanteur des corps qui nous environnent, & nous ſuppoſons que cette force eſt conſtante, c'eſt-à-dire, agit également ſur toutes les parties égales de matiere. De plus les directions de cette même force peuvent être regardées comme parallèles, ſur des étendues aſſez ſenſibles ; car ſi des deux extrémités d'une ligne horiſontale qui a 16 toiſes de longueur, on conçoit deux lignes menées au centre de la terre, l'angle formé par ces deux lignes eſt à peine d'une ſeconde. Ainſi la ſurface de la liqueur d'un réſervoir eſt ſenſiblement *plane* quand elle a peu d'étendue ; mais ſi elle eſt conſidérable, elle doit être regardée comme faiſant partie d'une ſurface ſphérique ou ſphéroïdique, ſelon que l'on conſidére la terre comme une ſphère ou comme un ſphéroïde.

Corollaire.

35. La surface *AE* du fluide contenu dans le vase *AME*, formant un plan horisontal, concevons que la portion quelconque *BDC* de ce fluide vienne à se glacer ou à se durcir sans pouvoir changer de place ni de volume ; il est clair que l'équilibre ne sera point troublé, & que les deux surfaces partielles *AB*, *DE* demeureront toujours dans un même plan horisontal. Donc si l'on a un syphon quelconque *KMO* contenant une liqueur immobile dont les deux surfaces soient *AB*, *DE*, ces deux surfaces seront nécessairement de *niveau* ou dans un même plan horisontal ; car rien n'empêche de considérer la liqueur du syphon comme la portion de liqueur *ABCDEM* du vase de la Figure 5. Fig. 5. Fig. 6.

Ce Corollaire embrasse une infinité de cas. De quelque maniere que deux branches de syphon, deux réservoirs quelconques communiquent ensemble, soit en se touchant immédiatement dans quelque partie, soit par des canaux de jonction, les liqueurs de même espèce contenues dans ces deux réservoirs, se mettent toujours de niveau. C'est par cette raison que l'eau des puits creusés dans le voisinage d'une riviere, se met au niveau de cette riviere, parce que l'eau filtre à travers la terre ou le gravier, & qu'il s'établit ainsi des canaux souterrains de communication entre la riviere & les puits. &c.

Remarque.

36. On doit remarquer que ce même Corollaire souffre une restriction dans l'état naturel & physique

des fluides. Pour que la liqueur ſe mette réellement de niveau dans les deux branches du ſyphon, il faut qu'elles ayent l'une & l'autre une certaine groſſeur, ſans être pour cela égales ni ſemblables. Mais lorſque l'une des branches eſt fort mince, que ſon diamètre, par exemple, n'excéde pas une ligne, tandis que celui de l'autre eſt beaucoup plus conſidérable; alors la liqueur ne ſe met plus de niveau dans les deux branches. La plûpart des liqueurs, comme le vin, l'eau, l'huile, l'eſprit de vin, &c. montent plus haut dans la petite branche (qu'on nomme *capillaire*, du mot latin *capillus*, cheveu) que dans l'autre. Au contraire, le mercure ſe tient plus bas dans la branche capillaire que dans la groſſe. L'aſcenſion des liqueurs dans les tuyaux capillaires ne ſe régle pas toujours ſur leur peſanteur ſpécifique. Mais il paroît conſtant par l'expérience que dans les tubes de différens diamètres, l'élévation ou l'abbaiſſement d'une même liqueur ſuit la raiſon inverſe des diamètres de ces tubes.

Tous ces phénomènes ſinguliers ont extrêmement exercé les Phyſiciens; mais aucun des ſyſtêmes qu'on a haſardés pour en rendre raiſon, n'eſt parfaitement ſatisfaiſant. Je ne m'arrêterai donc pas à les expoſer, mon unique but étant de donner la théorie mathématique de l'équilibre des fluides conſidérés dans l'état de fluidité parfaite, & de faire par conſéquent abſtraction de toutes les cauſes phyſiques & extérieures qui peuvent altérer les conſéquences réſultantes de cette hypothèſe.

PROPOSITION III.

37. *La liqueur contenue dans le vase* AMNE *étant en repos, & soumise à la seule action de la pesanteur; une particule quelconque* m *est également pressée en tout sens avec une force égale au poids de la petite colonne* om *qui lui répond verticalement.* Fig. 7.

DÉMONSTRATION.

1°. La particule *m* est également pressée en toutes sortes de sens, autrement elle ne seroit pas en équilibre (23).

2°. La pression qu'elle souffre est égale au poids absolu de la petite colonne *om*; car si l'on conçoit que la masse entière du fluide, à l'exception de la colonne *om*, vienne à se durcir sans pouvoir changer de place ni de volume, la particule *m* demeure toujours dans le même état de compression qu'auparavant. Or, lorsque le filet *om* est seul fluide, le reste de la masse étant durci, elle porte évidemment le poids entier de ce filet *om*. Donc la mesure de la pression qu'elle souffre dans tous les cas, est le poids absolu de la même colonne *om*. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

38. Imaginons une courbe quelconque *FmQ* qui touche la particule *m* du côté de la paroi *AM*, & supposons que la portion de liqueur *AFmQM* se durcisse sans pouvoir changer de place ni de volume: la particule *m* est toujours pressée en tout sens, de la même manière que si la masse entière étoit de- Fig. 8.

meurée fluide. On peut auſſi concevoir, ſans troubler l'équilibre, que la portion quelconque *EHSN* de liqueur eſt encore durcie. Donc ſi l'on a un vaſe
Fig. 9. quelconque *FQSH*, un point quelconque *m* de ſes parois eſt preſſé par le fluide avec une force égale au poids abſolu du petit filet vertical *om* qui ſe termineroit à la ſurface du fluide, prolongée s'il eſt néceſſaire; car on peut regarder la liqueur du vaſe *FQSH* (Fig. 9) comme la portion *FQSH* de liqueur du vaſe repréſenté (Fig. 8), les deux portions *AFmQM*, *EHSN* étant ſuppoſées durcies.

COROLLAIRE II.

Fig. 9. 39. Soit *my* une partie quelconque infiniment petite des parois du vaſe *FQSH*: la preſſion perpendiculaire que cette partie ſouffre eſt en raiſon compoſée du nombre de molécules qui couvrent la petite ſurface *my*, & de la hauteur verticale *om* qu'on peut regarder comme la même pour tous les points de l'élément *my*. Ainſi en nommant *p* la peſanteur ſpécifique de la liqueur, la preſſion dont il s'agit ſera exprimée par $p \times om \times my$ (17).

PROPOSITION IV.

Fig. 10. 40. *La liqueur contenue dans le vaſe* ANE *étant en repos & ſoumiſe à la ſeule action de la peſanteur; la ſomme des preſſions perpendiculaires que ſouffrent tous les élémens d'une partie quelconque finie* fnr *du fond ou des parois du vaſe, eſt égale au poids abſolu d'une colonne qui auroit pour baſe la ſurface* fnr *(con-*

vertie en une ſurface plane, s'il eſt néceſſaire), & pour hauteur la diſtance verticale GO *du centre de gravité* G *de la même ſurface* fnr, *à la ſurface* AE *du fluide.*

Démonstration.

Qu'on partage la ſurface fnr en une infinité d'élémens fg, gx, xy, &c, & qu'on mene les verticales ft, gu, xz, &c terminées par la ſurface du fluide. Soit p la peſanteur ſpécifique du fluide. Les preſſions perpendiculaires que ſouffrent les élémens fg, gx, xy, &c ſont repréſentées reſpectivement par les produits $p \times fg \times ft$, $p \times gx \times gu$, $p \times xy \times xz$, &c, (39). Or en conſidérant ces produits comme les momens d'autant de petits poids, par rapport au plan de niveau de la liqueur, on ſçait, par les loix de la Statique, que $p \times fg \times ft + p \times gx \times gu + p \times xy \times xz + \&c = p \times (fg + gx + xy + \&c) \times GO = p \times fnr \times GO$; ce qui revient à l'énoncé de la propoſition. C. Q. F. D.

Corollaire I.

41. Donc ſi le fond MN d'un vaſe de figure quelconque eſt horiſontal, la preſſion que ce fond ſouffre eſt exprimée par $p \times MN \times GO$, p étant la peſanteur ſpécifique du fluide, GO la verticale élevée par le centre de gravité G du fonds MN, & terminée par la ſurface du fluide, prolongée lorſqu'il eſt néceſſaire. Fig. 11, 12, 13.

On voit par-là que ſi les fonds des trois vaſes repréſentés dans les Figures 11, 12, 13 ſont égaux, & que la même liqueur ſoit à même hauteur au-deſſus

du fond, dans les trois vaſes, on voit, dis-je, que les fonds ſouffriront des preſſions égales. Il eſt en effet évident que ſi l'on mene (Fig. 12 & 13) les verticales *Mm*, *Nn*; qu'enſuite on ſuppoſe (Fig. 12) que les deux portions de liqueur *AMm*, *ENn* ſe durciſſent en conſervant toujours la même place & le même volume, & que (Fig. 13) les eſpaces *AmM*, *EnN* étant ſuppoſés remplis de liqueur, les parois *AM*, *EN* s'anéantiſſent, tout demeure le même qu'auparavant, & les trois fonds doivent être également preſſés.

COROLLAIRE II.

42. Il peut donc ſe faire que la preſſion du fond d'un vaſe & le poids total de la liqueur contenue dans ce vaſe ſoient des choſes très-différentes. Dans le vaſe cylindrique de la Figure 11, la preſſion du fond eſt égale au poids de toute la liqueur; mais dans les vaſes des Figures 12 & 13, la premiere force eſt moindre ou plus grande que la ſeconde.

Lorſqu'on a un vaſe rempli d'eau à ſoulever verticalement, ou à ſoutenir ſur un plan incliné, il faut avoir égard, dans le calcul de la puiſſance, au poids abſolu de l'eau & du vaſe, & nullement à la preſſion contre les fonds & contre les parois; car on peut conſidérer à chaque inſtant le ſyſtême comme ne faiſant qu'une ſeule & même maſſe ſolide. Je fais ici cette remarque, toute ſimple qu'elle eſt, parce que l'Auteur d'un Ouvrage très-répandu s'eſt trompé groſſièrement à ce ſujet.

COROLLAIRE III.

43. Soit AM une vanne rectangulaire & verticale d'écluse soutenant la pression de la masse d'eaux dormantes AMO dont l'étendue horisontale MO est aussi grande ou aussi petite qu'on voudra, car cela est obsolument indifférent quant à l'effet de la pression. Soit G le milieu ou centre de gravité de la vanne, & nommons A le côté horisontal du rectangle qui forme la même vanne. La pression qu'elle supporte, sera exprimée par $p \times A \times AM \times GM = p \times A \times \frac{\overline{AM}^2}{2}$, p étant la pesanteur spécifique de l'eau. Fig. 14.

Par exemple, soient $AM = 12$ pieds, $A = 3$ pieds; on aura $A \times \frac{\overline{AM}^2}{2} = 216$ pieds cubes; & comme le pied cube d'eau douce pese environ 70 livres, il s'ensuit que la pression $p \times A \times \frac{\overline{AM}^2}{2} = 15120$ livres.

On détermineroit aussi facilement la pression, si la vanne n'étoit pas verticale, & qu'elle eût même toute autre figure que la figure rectangulaire.

COROLLAIRE IV.

44. Qu'on pose sur la surface horisontale AE de la liqueur $AMNE$, livrée à l'action de la pesanteur un couvercle mobile chargé dans son milieu d'un poids Q; ce qui ne trouble point l'équilibre. Qu'ensuite on fasse en un endroit quelconque des parois du vase une ouverture fr, à laquelle soit appliqué un piston pour empêcher l'écoulement. Cela Fig. 15

posé 1°. la pression du poids Q qu'on peut regarder comme partagée en une infinité de puissances qui pressent perpendiculairement la surface *AE*, se distribue à tous les points du fluide, & il en résulte contre la surface *fr* une pression qui est exprimée par $\frac{fr}{AE} \times Q$ (28). 2°. En vertu de la pesanteur du fluide, la surface *fr* est pressée perpendiculairement avec une force égale au poids d'une colonne du même fluide, qui auroit *fr* pour base & pour hauteur la distance *GE* de son centre de gravité au niveau de la liqueur. Soit nommé *R* ce poids. On voit que la puissance *P* appliquée au piston soutenant à la fois les efforts des deux puissances $\frac{fr}{AE} \times Q$ & *R*, on doit avoir $P = \frac{fr}{AE} \times Q + R$.

COROLLAIRE V.

Fig. 16. 45. Supposons un vase *AMNE* fermé de tous côtés, rempli d'une liqueur pesante ou non, & dont le fond supérieur *AE* soit horisontal. Qu'on fasse à ce fond deux ouvertures *fr*, *gt*, & qu'on y applique deux poids *P* & *Q*, tels que l'on ait, $P : Q :: fr : gt$; ces deux poids sont en équilibre, comme dans l'article 31; car que la liqueur soit pesante ou non, les deux poids *P* & *Q* agissent de la même maniere à la surface & dans l'intérieur du fluide.

COROLLAIRE VI.

Fig. 17. 46. Maintenant, si au lieu de supposer, comme dans le Corollaire précédent, deux poids *P* & *Q* appliqués

aux deux ouvertures fr, gt, on suppose que ces ouvertures servent de bases à deux colonnes quelconques $fxyr$, $gzut$ de liqueurs différentes ; qu'ensuite ayant élevé par les centres de gravité G & T des deux bases fr, gt les verticales GO, TS, on nomme p & ϖ les pesanteurs spécifiques des deux liqueurs $fxyr$, $gzut$: on voit (41) que la pression de la liqueur $fxyr$ sur le fond fr, est exprimée par $p \times fr \times GO$, & que la pression de la liqueur $gzut$ sur le fond gt est exprimée par $\varpi \times gt \times TS$. Or si l'on a la proportion, $p \times fr \times GO : \varpi \times gt \times TS :: fr : gt$, les deux forces proposées seront en équilibre (45). On aura donc alors $p \times GO = \varpi \times TS$, & par conséquent $GO : TS :: \varpi : p$, c'est-à-dire que les hauteurs des deux colonnes liquides $fxyr$, $gzut$ qui se font équilibre, sont en raison inverse de leurs pesanteurs spécifiques.

Par exemple, si la colonne $fxyr$ est d'eau, & la colonne $gzut$ de mercure, on aura $GO : TS :: 14 : 1$ environ. On sçait que le mercure est compressible & dilatable par le froid & par le chaud ; mais ici on fait abstraction de cette qualité & on prend sa pesanteur spécifique moyenne, & pour un air tempéré.

Il est superflu d'ajouter que les efforts résultans des pressions des deux colonnes proposées, contre les parois du vase, se déterminent comme dans l'article 44.

PROPOSITION V.

47. *Si une liqueur pesante est en équilibre dans un vase flexible ; quelque figure que ce vase prenne, la*

ſurface du fluide, ſuppoſée libre, eſt horiſontale.

Car le vaſe flexible ayant pris la figure que demande l'équilibre des forces qui agiſſent ſur le fluide, rien n'empêche de regarder ce vaſe comme ſolide. Or quelle que ſoit la figure de ces ſortes de vaſes, la démonſtration de l'article 33 a également lieu : donc, &c.

COROLLAIRE.

48. De-là ſuit une conſéquence pareille à celle de l'article 35. La liqueur contenue dans un ſyphon compoſé de parois flexibles, ſe met toujours de niveau dans les deux branches, ſauf l'exception qui a lieu quand une des branches eſt capillaire.

PROPOSITION VI. PROBLEME.

49. *Déterminer les conditions générales qui doivent avoir lieu, pour qu'un fluide ſe mette en équilibre, par ſa peſanteur, dans un vaſe flexible, peſant & inextenſible ?*

SOLUTION.

Fig. 18. Soient *AMNOPB* la figure que le vaſe prend, figure qu'on doit regarder ici comme la coupe verticale d'un priſme qui a une infinité de côtés, & dont la longueur eſt horiſontale. Le Problême étant réſolu pour ce cas, il ne ſera pas difficile de le généraliſer, du moins quant aux conditions de l'équilibre, pour toutes ſortes de vaſes, & même en ſuppoſant que les parois fuſſent extenſibles, pourvu que cette extenſibilité fût aſſujettie à une loi conſtante & donnée.

Considérons la courbe $AMNOPB$ comme un polygone rectiligne d'une infinité de côtés. Soient MN, NO, OP trois élémens consécutifs & égaux. Le fluide étant en équilibre, & le vase ayant pris une forme stable, nous pouvons regarder les points M & P comme fixes ; & faisant abstraction du reste de la courbe, considérer $MNOP$ comme une polygone funiculaire attaché aux deux points fixes M, P ; & aux angles N, O duquel sont appliquées deux forces, l'une verticale NS ou Os qui représente le poids de l'élément MN ou ON, l'autre NR ou Or qui divise l'angle MNO ou NOP en deux parties égales & qui représente la pression du fluide, laquelle étant partout perpendiculaire à la courbe, divise en deux parties égales l'angle formé par deux élémens consécutifs. Des deux forces NS, NR appliquées à l'angle N, je compose la force unique NQ, exprimée par la diagonale NQ du parallélogramme $NSQR$; avec NQ & la tension NV du cordon MN je compose une force unique NT dirigée suivant ON, & exprimée par la diagonale NT du parallélo gramme $NQTV$. Je fais la même opération relativement aux forces appliquées à l'angle O ; & je les réduis à la force unique Ot dirigée suivant NO. Cela posé, il est évident que pour qu'il y ait équilibre, il faut que les deux forces NT, Ot directement opposées, soient égales. Ainsi il ne s'agit plus que de trouver les expressions de ces deux forces, & de les égaler entr'elles.

Du point Q soit abbaissée la perpendiculaire QE sur NS prolongée. On aura, par les regles de la

Trigonométrie, le ſinus total étant exprimé par 1, $EQ = SQ$. ſin. $ESQ = NR$. ſin. RNS; $SE = NR$. coſ. RNS; $NE = NS + NR$. coſ. RNS; ſin. $ENQ = \frac{EQ}{NQ} = \frac{NR.\text{ ſin. } RNS}{NQ}$; coſ. $ENQ = \frac{NE}{NQ} = \frac{NS + NR.\text{ coſ. } RNS}{NQ}$; ſin. $TQN =$ ſin. $(MNG + ENQ) =$ ſin. MNG. coſ. $ENQ +$ coſ. MNG. ſin. $ENQ = \frac{\text{ſin. } MNG\,(NS + NR \text{ coſ. } RNS)}{NQ} + \frac{\text{coſ. } MNG \,.\, NR \text{ ſin. } RNS}{NQ}$. Maintenant on a la proportion $NQ : TN ::$ ſin. MNT : ſin. TQN; & par conſéquent $TN = \frac{NQ \times \text{ ſin. } TQN}{\text{ſin. } MNT}$. Subſtituant, à la place de ſin. TQN, ſa valeur, on trouvera $TN =$
$\frac{\text{ſin. } MNG\,(NS + NR \,.\, \text{coſ. } RNS)}{\text{ſin. } MNT} + \frac{\text{coſ. } MNG.NR.\text{ſin. } RNS}{\text{ſin. } MNT}$.

On trouvera exactementde la même manière $Ot =$
$\frac{\text{ſin. } POI.\,(Os + Or.\text{coſ. } rOs)}{\text{ſin. } POt} + \frac{\text{coſ. } POI.\,Or.\,\text{ſin. } rOs}{\text{ſin. } POt}$.

Ainſi pour remplir les conditions de l'équilibre, on aura l'équation

$$\frac{\text{ſin. } MNG\,(NS + NR.\text{coſ. } RNS) + \text{coſ. } MNG.NR \text{ ſin. } RNS}{\text{ſin } MNT}$$
$$= \frac{\text{ſin. } POI\,(Os + Or\,.\text{coſ. } rOs) + \text{coſ. } POI.\,Or \text{ ſin. } rOs}{\text{ſin. } POt},$$

d'après laquelle les Géometres trouveront ſans peine celle de la courbe $AMNOPB$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

50. Soit *AMNOPB* un anneau circulaire & flexible, posé sur un plan horisontal; & que cet anneau soit pressé par un fluide qui agit perpendiculairement à tous ses points ou suivant la direction horisontale de chaque rayon. Les forces *NS*, *Os* (Fig. 18) sont ici nulles; & l'équation générale, requise pour l'équilibre, devient $\frac{\text{sin. } TRN \times NR}{\text{sin. } MNT} = \frac{\text{sin. } trO \times Or}{\text{sin. } POt}$. Fig. 19.

Maintenant comme toutes les forces *NR*, *Or* sont égales, il est évident que les élémens *MN*, *NO*, *OP* étant égaux (hyp.), l'uniformité de courbure de la circonférence *AMNOPB* rend les forces *NT*, *Ot* égales entr'elles. Donc elles se font équilibre. Il y a pareillement équilibre dans tous les autres points de la courbe. Donc l'anneau doit conserver la forme circulaire.

COROLLAIRE II.

51. Il suit de l'article précédent, que si l'on emplit de liqueur un vase prismatique vertical, & dont les parois sont parfaitement flexibles sans être extensibles, ce vase prendra nécessairement la figure d'un cylindre droit; car si l'on décompose sa surface convexe en une infinité d'anneaux par des plans horisontaux, chaque anneau prendra la figure que demande l'équilibre. Or cette figure est un cercle, comme on vient de le voir. Donc le vase proposé deviendra cylindrique, puisque la figure requise pour l'équilibre est unique & déterminée.

COROLLAIRE III.

52. L'hypothèſe de l'article 50 ſubſiſtant toujours, on voit que la force *NT* exprime la tenſion de l'élément *NO*, tandis que la force *NR* exprime la preſſion du fluide en *N*. Il eſt clair de plus qu'à tous les autres points de la circonférence répondent deux forces analogues & égales chacune à chacune des deux forces *NT*, *NR*. Or à cauſe des triangles *NRT*, *NOC* qui ſont ſemblables, puiſque les angles *RNT*, *ONC* ſont égaux, & que *CO* pouvant être cenſée parallèle à *CN*, les angles *NRT*, *NOC* ſont auſſi égaux; on a la proportion $NR : TN :: NO : CN$. Donc, en nommant *n* le nombre de toutes les puiſſances *NR* appliquées à tous les points de la circonférence, il eſt viſible que la ſomme des mêmes puiſſances eſt à la tenſion de la circonférence en chacun de ſes élémens, comme $n \times NO$ eſt à *CN*, c'eſt-à-dire, comme la circonférence *AMNOPB* eſt au raïon *CN*.

COROLLAIRE IV.

Fig. 20 & 21. 53. Si l'on a deux cylindres flexibles *ABCD*, *abcd* droits ou inclinés, mais dont les baſes ſoient horiſontales, & que ces cylindres ſoient remplis de liqueurs de différente eſpèce : les tenſions des deux circonférences *BMNC*, *bmnc* ſeront entr'elles en raiſon compoſée des hauteurs des liqueurs, de leurs peſanteurs ſpécifiques, & des raïons *BH*, *bh* des mêmes circonférences. Car ſoient *AB*, *ab* les hauteurs verticales des deux cylindres propoſés, *p* & ϖ les

les pesanteurs spécifiques des deux liqueurs : la somme des pressions que le fluide $ABCD$ exerce sur tous les points de la circonférence $BMNC$ est exprimée par $p \times AB \times BMNC$, & la somme des pressions que le fluide $abcd$ exerce sur tous les points de la circonférence $bmnc$ est exprimée par $\varpi \times ab \times bmnc$ (37). Soient nommées F & f les tensions des deux circonférences $BMNC$, $bmnc$ en chacun de leurs élémens : on aura les deux proportions (52),

$$p \times AB \times BMNC : F :: BMNC : BH$$

$$\varpi \times ab \times bmnc : f :: bmnc : bh.$$

Or $BMNC : BH :: bmnc : bh$. Donc $F : f :: p \times AB \times BMNC : \varpi \times ab \times bmnc :: p \times AB \times BH : \varpi \times ab \times bh$.

COROLLAIRE V.

54. Soient les deux couronnes $BSERKM$, $bserkm$ les anneaux élémentaires dont les deux cylindres de l'article précédent sont composés suivant leurs épaisseurs. Imaginons que ces couronnes sont elles-mêmes composées d'une infinité de filets représentés par les circonférences $XYVZ$, $xyvz$. Il est évident que les résistances que les deux tuyaux cylindriques opposent à leur rupture suivant leurs épaisseurs BS, bs, sont en raison composée du nombre des filets dont les anneaux élémentaires sont formés, & de la ténacité des matieres dont ils sont faits. Donc en nommant R & r les deux résistances dont il s'agit; E & e les épaisseurs BS; bs; T & t les ténacités des matières dont les tuyaux sont faits : on aura $R : r$ :: Fig. 22 & 23.

$ET:et$. Or pour qu'il y ait équilibre, il faut que les forces R & r ſoient égales reſpectivement aux forces F & f dont il a été parlé dans l'article précédent. Donc en nommant H & h les hauteurs des liqueurs dans les deux cylindres; D & d les diamètres des baſes des mêmes cylindres : on aura $ET : et :: \frac{pHD}{2} : \frac{\varpi hd}{2}$. Donc $E : e :: \frac{pHD}{T} : \frac{\varpi hd}{t}$, c'eſt-à-dire *que les épaiſſeurs des deux cylindres ſont en raiſon compoſée de la directe des peſanteurs ſpécifiques des liqueurs, de leurs hauteurs, des diamètres des cylindres, & de l'inverſe des ténacités des matières dont les tuyaux ſont faits.*

Lorſque les liqueurs ſont de même eſpèce, auſſi-bien que les matières dont les tuyaux ſont faits, la proportion ſe ſimplifie & devient $E : e :: HD : hd$.

Fig. 12. & 13.

SCHOLIE.

55. On voit par cette théorie que connoiſſant les ténacités des différentes matieres dont les tuyaux peuvent être faits, & connoiſſant de plus par une expérience immédiate, l'épaiſſeur qu'un certain tuyau doit avoir pour réſiſter au poids d'un fluide donné, on connoîtra par une ſimple proportion l'épaiſſeur de tout tuyau dont les autres dimenſions ſont données. Il y a pluſieurs moyens d'éprouver la ténacité d'une matière propoſée. Le plus ſimple eſt de déterminer le poids qui eſt ſimplement néceſſaire pour rompre un filet de cette matière, de groſſeur donnée. M. Mariotte a fait ſur ce ſujet quelques expériences dont on peut

voir le détail dans son *Traité du mouvement des eaux*. Je passe à l'application de la théorie précédente à des exemples.

EXEMPLE I.

On propose de déterminer l'épaisseur que doit avoir un tuyau de plomb de 6 pouces de diamètre, & qui doit soutenir l'effort d'une colonne d'eau de 100 pieds de hauteur.

Il est évident qu'on peut considérer le tuyau comme composé dans son épaisseur d'une infinité de filets flexibles. Or, suivant une expérience de M. Parent, un tuyau de plomb de 12 pouces de diamètre, & de 60 pieds de hauteur, doit avoir 6 lignes d'épaisseur, pour soutenir verticalement, sans crever, l'effort de l'eau. On aura donc (54), en nommant x l'épaisseur cherchée, $60 \times 12 : 100 \times 6 :: 6^{\text{lig.}} : x = 5$ lignes.

EXEMPLE II.

On demande l'épaisseur que doit avoir un tuyau de cuivre de 4 pouces de diamètre, pour soutenir l'effort d'une colonne de mercure de 30 pieds de hauteur.

La tenacité du plomb est à celle du cuivre, comme 1 est à 28 environ; & la pesanteur spécifique de l'eau est à celle du mercure, comme 1 est à 14 environ. Ainsi en continuant à nous servir de l'expérience de M. Parent, & nommant x l'épaisseur cherchée, on aura (54), $\frac{1 \times 12 \times 60}{1} : \frac{14 \times 4 \times 30}{28} :: 6^{\text{lig.}} : x = \frac{1}{2}$ lignes.

NOTES SUR LE CHAPITRE I.

Note 1. (*Art.* 34).

I. Dans toute la partie élémentaire de ce Traité, je regarde les corps comme placés à la ſurface de la terre, c'eſt-à-dire, à des diſtances égales ou ſenſiblement égales de ſon centre; & conſéquemment, lorſqu'il faut avoir égard à l'effet de la peſanteur, je ſuppoſe avec Galilée, ou plutôt d'après l'expérience, que cette force eſt conſtante, & qu'elle agit ſur toutes les parties d'un même corps ſuivant des directions qu'on peut regarder comme parallèles. De plus je conſidère les fluides incompreſſibles, comme ayant par-tout la même denſité. Mais il y a une branche très-étendue & très-importante de l'Hydroſtatique, celle qui a pour objet la figure de la terre, où les loix de l'équilibre des fluides doivent être enviſagées ſous un point de vûe plus général. La peſanteur qui agit ſur les parties d'un fluide & ſur les corps qui l'environnent, peut varier en quantité & en direction; & le fluide, quoiqu'incompreſſible, peut n'avoir pas la même denſité dans toute ſon étendue.

II. Les premiers Géomètres qui ont cherché à déterminer la figure de la terre par la théorie, conſidérant l'étendue immenſe des mers, leur profondeur, leur communication univerſelle & réciproque, la quantité prodigieuſe de rivières qui couvrent la ſurface du globe terreſtre, le peu d'élévation des plus hautes montagnes au-deſſus du niveau de la mer, en

comparaiſon du raïon de la terre, &c ont été amenés naturellement à penſer que la terre dans ſon origine n'étoit qu'une maſſe fluide qui s'eſt durcie en partie, & qu'elle a dû prendre la figure que demande l'équilibre des fluides. On a raiſonné de même, par analogie, pour les autres planètes; & le problême général de la figure des planètes a été réduit à ceci. *Connoiſſant la loi ſuivant laquelle la peſanteur agit ſur les parties d'une planète fluide, trouver la figure que cette planète doit prendre pour demeurer en équilibre.* M. Huygens employe, pour réſoudre ce problême, le principe que nous avons démontré (33), que *ſi une maſſe fluide eſt en équilibre, ſa ſurface eſt par-tout perpendiculaire à la direction de la peſanteur.* M. Newton part de cette autre loi, que *ſi une maſſe fluide eſt en équilibre, deux colonnes quelconques menées de la ſurface au centre, ſe font mutuellement équilibre, indépendamment du reſte de la maſſe.* Ces deux principes ſont également vrais; mais le premier n'établit l'équilibre qu'à la ſurface, & le ſecond que dans l'intérieur de la maſſe; ils ne ſuffiſent donc pas chacun ſéparément pour déterminer la figure d'une planète. M. Bouguer ayant cherché (Mém. de l'Acad. an. 1734) par l'un & l'autre la figure d'un Méridien de la terre, & ayant trouvé que dans pluſieurs hypothèſes de peſanteur, ils ne donnoient pas la même courbe, a conclu qu'alors il n'y a pas d'équilibre; & il établit qu'une planète ne ſçauroit conſerver une figure permanente que quand les deux principes s'accordent à donner la même courbe pour le Méridien.

Il y a plus. M. Clairaut démontre (*Fig. de la terre, pag.* 31) qu'il se trouve des cas où les deux principes s'accordent à donner la même courbe, & où cependant l'équilibre n'a pas lieu. Il analyse les hypothèses de pesanteur qui admettent l'équilibre, & il rejette toutes les autres comme incompatibles avec l'état d'équilibre & de consistance, où nous voyons que demeurent les masses des planètes.

III. M. Maclaurin, dans sa Pièce *sur le flux & le reflux de la Mer*, qui a partagé le prix de l'Académie en 1740, pose un principe plus général que celui de Newton, & qui dérive immédiatement de l'égalité de pression des fluides en toutes sortes de sens. Selon lui, *dans une masse fluide en équilibre, deux colonnes menées de la surface à un point pris dans tel endroit du fluide qu'on voudra, se font mutuellement équilibre*. De-là il s'ensuit, comme M. d'Alembert l'a démontré dans son *Essai sur la résistance des fluides*, qu'en général, *dans une masse fluide en équilibre, un canal curviligne quelconque terminé de part & d'autre à la surface, ou bien un canal curviligne, aussi quelconque, & rentrant en lui-même, est en équilibre.*

IV. M. Clairaut qui a adopté ce dernier principe dans son Traité de la Figure de la terre, propose en conséquence la méthode suivante, pour reconnoître si la loi de la pesanteur d'une masse fluide étant donnée, ce fluide peut être en équilibre. Soient
Fig. 24. *AQN* une masse fluide en équilibre; *OM* un canal de figure quelconque, rentrant en lui-même. Ayant

pris à volonté l'axe fixe CP, soit menée l'ordonnée MP. Quelles que soient les forces qui agissent sur le point M, on peut toujours les réduire à deux, dont l'une soit dirigée perpendiculairement, l'autre parallèlement à CP. Supposons la premiere $= P$; la seconde $= Q$; $CP = x$; $PM = y$. En menant mp infiniment proche de MP, & mr perpendiculaire à MP, on verra aisément que la force P pousse le point M dans le sens de l'élément Mm du canal OM avec un effort exprimé par $\frac{P \times rM}{Mm}$; & que par conséquent l'effort sur tous les points de $Mm = Mm \times \frac{P \times rM}{Mm} = P\,dy$. De même, l'effort que la force Q exerce sur tous les points de Mm dans le sens Mm est $Q\,dx$. Ainsi $P\,dy + Q\,dx$ est la force élémentaire totale qui pousse l'élément Mm suivant sa propre direction. Donc $\int (P\,dy + Q\,dx)$ est le poids du canal OM; & comme il doit y avoir équilibre, quelle que soit la figure du canal OM, il faut que l'intégrale précédente puisse se trouver sans connoître la relation de x à y. Donc $P\,dy + Q\,dx$ doit être une différentielle complette. Ainsi, conclut M. Clairaut, *lorsque la loi de la pesanteur sera telle que* P dy + Q dx *soit une différentielle complette, il y aura nécessairement équilibre dans le fluide.*

V. Cette condition n'est pas suffisante, comme M. d'Alembert vient de le démontrer, dans le cinquiéme volume de ses Opuscules Mathématiques. Appliquons son raisonnement à un exemple fort sim-

ple. Soit OM un canal circulaire décrit du centre C avec le raïon CO ou CM. Que chaque point M ſoit pouſſé perpendiculairement au raïon CM avec une force dirigée dans le ſens MV, & réciproquement proportionnelle au raïon CM. Nommant ϕ cette force, on aura évidemment $\phi : P :: CM : CP$; & par conſéquent $P = \frac{\phi \times CP}{CM} = \frac{CP}{\overline{CM}^2} = \frac{x}{xx+yy}$. De même, $Q = \frac{y}{xx+yy}$. Par conſéquent nous aurons ici $\frac{ydx - xdy}{xx+yy}$ pour le poids élémentaire de OM. Je mets — à l'un des termes, tandis que l'autre a le ſigne +, parce que x augmentant y diminue. Cette différentielle eſt complette, puiſque c'eſt celle d'un angle dont $\frac{x}{y}$ eſt la tangente pour le rayon 1. Il devroit donc y avoir équilibre, ſuivant M. Clairaut. Cependant il eſt évident que les forces appliquées à tous les points M du canal OM doivent produire un courant perpétuel dans le ſens OMZ. Le théorême de M. Clairaut n'eſt donc pas ſuffiſant.

Il y a pluſieurs autres cas pareils à celui que nous venons d'examiner ; & pour conclure en général qu'une maſſe fluide eſt en équilibre, il faut non-ſeulement que $Pdy + Qdx$ ſoit une différentielle complette; mais il faut encore qu'en nommant dz l'élément d'un canal quelconque rentrant en lui-même, Π la force qui agit dans le ſens de ce canal, on ait

$\int \Pi d z = 0$, lorſque l'angle qui répond à z & qui a ſon ſommet en dedans du canal, eſt de 360°. Il eſt donc à propos que l'intégrale de $P dy + Q dx$ ſoit telle qu'elle ne dépende ni de la rectification, ni de la quadrature d'une courbe ovale; car autrement il pourroit ſe faire qu'un canal quelconque, rentrant en lui-même, ne fût pas en équilibre, & qu'il y eût dans ce canal un courant perpétuel. Voyez l'Ecrit de M. d'Alembert, *Opuſc. Math.* Tom. V, pag. 12 & ſuiv.

VI. En appliquant immédiatement le principe d'égalité de preſſion au problême de la figure des aſtres, on trouve ſans peine la figure qu'une planète doit prendre pour demeurer en équilibre, lorſque la loi de la peſanteur eſt donnée directement. Je me contenterai de montrer ici l'uſage de ce principe dans un cas qui en embraſſe pluſieurs autres. Soit *ABDE* une maſſe fluide homogène dont toutes les parties ſont attirées vers le centre *C*, ſuivant une loi donnée, & qui tourne en même temps autour de l'axe *AD*; enſorte que chaque particule *M*, outre l'action de ſa peſanteur propre, éprouve encore celle de la force centrifuge qui eſt proportionnelle, comme on ſçait, à la diſtance *MP* du point M à l'axe *AD*. On voit d'abord (33) que la ſurface *ABDE* ſera, dans tous ſes points, perpendiculaire à la réſultante de la force centrale & de la force centrifuge; car cette réſultante fait ici l'office de la peſanteur dont il s'agit dans l'article cité. Imaginons que la planète eſt compoſée d'une infinité de ces *couches* Fig. 25.

de niveau, & ſoit $KHQT$ l'une d'entr'elles, priſe à volonté. Cela poſé, il eſt évident que le fluide entier ſera en équilibre, lorſque chaque couche particulière y ſera. Or pour que chaque couche ſoit en équilibre, il faut qu'elle ſoit également preſſée dans tous ſes points.

Soient $CP = x$; $PM = y$; la force centrale $= \phi$, fonction de x & y; la preſſion en $M = p$, fonction de x & y. Suppoſons de plus qu'à une diſtance donnée a, la force centrifuge $= f$. On aura $dp = Mdx + Ndy$, M & N étant des fonctions de x & y, telles que dp ſoit une différentielle complette, autrement il n'y auroit pas d'équilibre. En conſidérant la portion de fluide qui eſt en M comme un petit rectangle $Mmrn$, dont la baſe $Mn = dx$, la hauteur $Mm = dy$, il eſt clair que Mdx exprime la quantité dont la preſſion ſur chaque point de nr ſurpaſſe la preſſion ſur chaque point de Mm, & que Ndy exprime la quantité dont la preſſion ſur chaque point de mr ſurpaſſe la preſſion ſur chaque point de Mn. Donc la preſſion entière ſur l'élément $Mmrn$ dans le ſens $nM = Mdx \cdot dy$, & la preſſion entière ſur le même élément dans le ſens $mM = Ndy \cdot dx$. Je décompoſe la force centrale ϕ en deux autres, l'une dirigée ſuivant Mn, l'autre ſuivant Mm; & j'obſerve que la maſſe de l'élément $Mmrn$ étant $dxdy$, ſa force motrice abſolue dans le ſens Mn, ſera $- \frac{\phi x}{\sqrt{[xx + yy]}} \times dxdy$, & que ſa force motrice abſolue dans le ſens Mm, ſera

$-\left(\frac{\phi y}{\sqrt{[xx+yy]}}-\frac{fy}{a}\right)\times dx\,dy$. Or pour qu'il y ait équilibre, il faut que ces deux forces ſoient égales chacune à chacune des preſſions correſpondantes. Ainſi on aura $M=-\frac{\phi x}{\sqrt{[xx+yy]}}$, & $N=-\frac{\phi y}{\sqrt{[xx+yy]}}+\frac{fy}{a}$. Donc $dp=-\frac{\phi(xdx+ydy)}{\sqrt{[xx+yy}}+\frac{fydy}{a}$, & $p=A-\int\frac{\phi(xdx+ydy)}{\sqrt{[xx+yy]}}+\frac{fyy}{2a}$, quantité qui doit être conſtante dans toute l'étendue d'une même couche.

VII. Suppoſons que la force centrale ſoit proportionnelle à la diſtance au centre; & qu'à la diſtance donnée a, cette force ſoit exprimée par F : nous aurons $\phi=\frac{F\sqrt{[xx+yy]}}{a}$. Donc $p=A-\frac{F(xx+yy)}{2a}+\frac{fyy}{2a}=$ quantité conſtante. Cette équation donnera une ligne droite, une ellipſe ou une hyperbole, ſelon le rapport qu'il y aura entre F & f. Contentons-nous d'examiner le ſeul cas où $F > f$.

VIII. Il eſt évident que dans la première couche $ABDE$, la preſſion doit être nulle. Ainſi ſuppoſant $CP'=x$, $P'M'=y$, la nature de la courbe $ABDE$ ſera exprimée par l'équation

$$A-\frac{F(xx+yy)}{2a}+\frac{fyy}{2a}=0.$$

Soit $CB=a$, & conſidérons que $x=0$ donne

$y = a$; nous aurons $A = \frac{(F - f)\,a}{2}$. Donc l'équation de la courbe $ABDE$ eſt

$$yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{aa(F-f)}{F} - xx\right)$$

qui eſt celle d'une ellipſe dont le demi-axe $CB = a$, & le demi-axe $CD = a\sqrt{\left[\frac{F-f}{F}\right]}$.

Pour trouver l'équation de la couche quelconque $KHQT$, ſuppoſons $CH = b$, $CP = x$, $PM = y$, & conſidérons que la preſſion du fluide en H eſt exprimée par $\frac{(F-f)\,a}{2} - \frac{(F-f)\,bb}{2a}$, comme il eſt évident : nous aurons en général $p = C - \frac{F(xx+yy)}{2a} + \frac{fyy}{2a} = \frac{(F-f)\,a}{2} - \frac{(F-f)\,bb}{2a}$. Ainſi en déterminant la conſtante C par la condition que $x = 0$ donne $y = b$, il nous viendra

$$yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{bb(F-f)}{F} - xx\right)$$

qui eſt l'équation d'une ellipſe ſemblable à l'ellipſe $ABDE$.

IX. Examinons ſi ces équations ſont applicables à la figure de la terre. Il eſt démontré dans tous les Livres de Méchanique que ſi l'on nomme f la force centrifuge d'un mobile qui décrit la circonférence C d'un cercle dont le raïon eſt R; T le temps de la révolution de ce mobile; g la gravité; t le temps qu'un corps grave employe à tomber par ſa peſanteur de la hauteur R : on a ces équations $f =$

$\frac{C^2}{T^2 R}$, $g = \frac{2R}{t^2}$. Donc $f : g :: \frac{C^2}{T^2 R} : \frac{2R}{t^2}$; & $\frac{f}{g}$ $= \frac{C^2 t^2}{2 R^2 T^2} = \frac{2 \Pi^2 t^2}{T^2}$, en nommant Π le rapport de la circonférence au diamètre. Maintenant, ſuivant l'expérience les corps graves parcourent environ 15 pieds pendant la première ſeconde de leur chûte. De plus, en prenant T pour le temps de la révolution de la terre autour de ſon axe, on a $T =$ 24 heures. Enfin chaque degré d'un grand cercle de la terre = 57000 toiſes environ. Si d'après ces données, on calcule la valeur de la fraction $\frac{2 \Pi^2 t^2}{T^2}$, on trouvera $\frac{2 \Pi^2 t^2}{T^2} = \frac{1}{289,49}$.

Cela poſé, reprenons l'équation $yy = \frac{F}{F-f} \left(\frac{aa(F-f)}{F} - xx \right)$. En ſuppoſant qu'elle fût celle du Méridien $ABDE$ de la terre, nous aurions $F = 289 f$ environ. Donc $CB : CD :: \sqrt{289} : \sqrt{288} :: 425 : 424$ environ. Or ce rapport des axes du Méridien n'eſt pas celui que donnent les obſervations, pour la terre. Le cas propoſé eſt donc une pure hypothèſe.

Voyez ſur toute cette matière un excellent Mémoire de M. Euler, qui a pour titre *Principes generaux de l'état d'équilibre des Fluides* (Mém. de l'Acad. de Berlin, an. 1755).

X. Dans le ſyſtême Newtonien, la loi de la peſanteur n'eſt pas donnée directement, comme nous

l'avons ſuppoſé dans les quatre derniers articles. Suivant ce ſyſtême qui eſt démontré par tous les phénomènes céleſtes, toutes les particules dont une planète eſt compoſée s'attirent mutuellement ; & l'attraction de deux d'entr'elles eſt en raiſon composée de la ſomme de leurs maſſes, & du quarré inverſe de leur diſtance. La réſultante de toutes les attractions qu'éprouve ainſi une particule quelconque eſt ce qu'on doit appeller ici ſa peſanteur. On ſent combien il étoit difficile de trouver la figure que la maſſe entière doit prendre pour que toutes ces attractions combinées avec la force centrifuge de chaque point, produiſent des forces qui ſe faſſent équilibre. Newton conſidérant que la terre, à cauſe de ſa rotation, doit être un ſphéroïde applati, peu différent d'une ſphère, ſuppoſa ſans le démontrer, que dans l'hypothèſe de l'homogénéïte du fluide, cette planète peut être un ellipſoïde dans lequel le diamètre de l'équateur eſt à l'axe de rotation, environ comme 230 eſt à 229. M. Maclaurin eſt le premier qui ait démontré en rigueur, dans ſa pièce déja citée, que la ſuppoſition de Newton eſt en effet légitime. Il va plus loin. Il démontre que ſi les particules de la terre, toujours ſuppoſée homogène, ſont non-ſeulement ſoumiſes à leur gravitation réciproque & à l'action de la force centrifuge, mais qu'elles ſoient encore attirées par le ſoleil ou par la lune, la terre ſera en équilibre, ſi elle a la forme d'un ſphéroïde elliptique. Le rapport des axes de ce ſphéroïde peut être tel qu'on voudra. Cette belle propoſition eſt

un des plus grands pas qui ſe ſoient faits dans la théorie de la figure des planètes. Mais il reſtoit encore à démontrer directement que la figure elliptique eſt la ſeule qui admette l'équilibre. M. d'Alembert fait voir, dans ſon Traité *de la Cauſe générale des Vents*, que ſi une maſſe fluide homogène eſt d'abord ſuppoſée ſphérique, & qu'enſuite on ſuppoſe qu'elle tourne autour de ſon axe avec une force centrifuge très-petite par rapport à la peſanteur, elle finira par prendre, après toutes ſes oſcillations que l'Auteur détermine, la forme d'un ſphéroïde elliptique applati. Il vient de généraliſer encore davantage cette même recherche dans le cinquiéme volume de ſes Opuſcules qu'on peut conſulter. Voy. pag. 25 & ſuiv.

XI. Le vrai rapport des axes de la terre n'eſt pas encore celui de 230 à 229 que donne l'hypothèſe de l'homogénéïte des parties, dans le ſyſtême Newtonien; mais celui de 178 à 177, environ, ſuivant les obſervations faites en France, en Lapponie & au Pérou. La terre n'eſt donc pas homogène. Il eſt facile de trouver, en ſuppoſant toujours l'attraction univerſelle & réciproque des parties, une loi entre les denſités, qui ſatisfaſſe aux obſervations. Toute cette théorie eſt également applicable aux figures des autres planètes. Mais je ne pourrois pas la développer ici avec l'étendue qu'elle demande, ſans m'écarter trop de mon objet principal. Ainſi je renvoye le lecteur aux Ouvrages cités.

Note 2. (*Art.* 49.)

I. Il eſt facile de trouver, comme nous l'avons dit dans cet article, la figure du vaſe flexible $AMNOPB$. En effet, ſoient menées à l'axe horiſontal AB les ordonnées MH, NH', OH''; & ſuppoſons $AH = x$, $AH' = x'$, $AH'' = x''$, $HM = y$, $H'N = y'$, $H''O = y''$, $MN = ds$ différentielle qui eſt conſtante, par conſtruction; le raïon de la développée, qui répond au point $N = R$, celui qui répond au point $O = R'$. Nommons de plus a^2 l'aire de la ſection perpendiculaire à la corde regardée comme cylindrique; b la largeur de la ſurface ſur laquelle s'exerce la preſſion du fluide; g la gravité. On aura évidemment, force $NR = g \cdot by'ds$, for. $NS = g \cdot a^2 ds$, for. $Or = g \cdot by''ds$. for. $Os = g \cdot a^2 ds$. Cela poſé, reprenons l'équation générale de l'article 49, & obſervons que NR (ſin. MNG . coſ. RNS + coſ. MNG . ſin. RNS) $= NR$ ſin. ($MNG + RNS$) $= NR \times$ ſin. $MNZ = NR \times$ ſin. $tot. = NR$; que pareillement Or (ſin. POI . coſ. rOs + coſ. POI ſin. rOs) $= Or$. Notre équation deviendra donc

Fig. 18.

$$\frac{NS \times \text{ſin.}\, MNG + NR}{\text{ſin.}\, MNT} = \frac{Os \times \text{ſin.}\, POI + Or}{\text{ſin.}\, POt},$$

Ou bien, en obſervant que ſin. $MNG = \frac{dx}{ds}$, ſin. $MNT = \frac{ds}{R}$, ſin. $POI = \frac{dx''}{ds}$, ſin. $POt = \frac{ds}{R'}$,

$$\frac{R(gby'ds + ga^2 dx)}{ds} = \frac{R'(gby''ds + ga^2 dx'')}{ds}.$$

Or $dx'' = d(x' + dx') = d(x + 2dx + ddx)$ =

$= dx + 2ddx + d^3x$; $y' = y + dy$; $y'' = y' + dy' = y + 2dy + ddy$; $R' = R + dR$. Donc en effaçant les termes qui se détruisent, & négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on aura $2a^2Rddx + a^2dRdx + bRdyds + bydRds = 0$, ou bien $a^2Rddx + a^2dRdx + bRdyds + bydRds = - a^2Rddx$, ou bien, en mettant pour R sa valeur $\frac{dsdy}{ddx}$ dans le second membre, $a^2Rddx + a^2dRdx + bRdyds + bydRds = - a^2dsdy$, dont l'intégrale est $a^2Rdx + byRds = Ads - a^2yds$. Chassant R, on aura $a^2dxdyds + a^2ydsddx = Adsddx - bydyds^2$ dont l'intégrale est $a^2ydxds = Bds^2 + Adxds - \frac{by^2ds^2}{2}$, équation d'où l'on tire enfin celle-ci,

$$dx = \frac{(2B - by^2)dy}{\sqrt{[(2a^2y - 2A)^2 - (2B - by^2)^2]}}$$

qui s'intègre en général par les quadratures. Cette intégration introduira dans le calcul une troisième constante C. Pour déterminer les trois constantes A, B, C, on observera 1°. que $y = 0$ donne, ou peut toujours donner $x = 0$, puisqu'on est maître de placer à volonté l'origine de la courbe. 2°. que les points extrêmes A & B sont donnés de position. 3°. que la longueur de la corde AMB est donnée; ou que la courbe fait, par exemple, en A un angle donné avec l'axe AB; ou qu'elle satisfait à quelqu'autre condition équivalente.

II. Supposons qu'on ait $A = 0$, $B = 0$; on trou-

vera $x = C \pm \sqrt{\left(\frac{4a^4}{b^2} - yy\right)}$ équation au cercle.

III. Soit $a^2 = 0$, ou ſuppoſons que la courbe *AMB* n'ait pas de peſanteur, on trouvera que $x = C + \int \frac{(2B - by^2)dy}{\sqrt{[4A^2 - (2B - by^2)^2]}}$, ce qui eſt l'équation de la *lintéaire* commune.

IV. Soit $b = 0$, ou que la liqueur n'ait pas de peſanteur, on aura $x = C + \int \frac{Bdy}{\sqrt{[(Ay - A)^2 - B^2]}}$, équation de la *chaînette*.

MM. Jean Bernoulli, Daniel Bernoulli & Euler, ſont les premiers qui ayent réſolu ces problêmes.

CHAPITRE II.

De l'équilibre des fluides élaſtiques.

56. Les fluides élaſtiques ſont ceux qui, ſans changer de maſſe, peuvent changer de volume ; ou, ce qui revient au même, qui ſe réduiſent en un moindre volume, lorſqu'ils ſont comprimés, & qui enſuite ſe dilatent lorſque la compreſſion ceſſe ou diminue. Tels ſont l'air, l'eſprit de vin, la vapeur de l'eau, &c.

57. Il n'eſt pas aiſé d'aſſigner la cauſe première & eſſentielle de la vertu élaſtique. Je ne m'occuperai

point ici de cette recherche qui appartient proprement à la Physique générale. Il suffit pour mon objet que la vertu élastique existe & se manifeste par ses effets. Ainsi nous supposerons comme un fait que certains corps se réduisent en un moindre volume, lorsqu'ils sont comprimés par une force extérieure; qu'ensuite cette compression cessant, ils se rétablissent dans leur premier état par une vertu, nommée élasticité, qui réside en eux; & que cette qualité expansive se déploye en tout sens avec la même force.

58. Les fluides élastiques sont soumis aux mêmes loix d'équilibre que les fluides incompressibles. Toutes ces loix sont fondées, comme nous l'avons déja remarqué, sur cette propriété primordiale, commune à toutes les liqueurs, qu'une particule quelconque d'une masse fluide en équilibre est également pressée en toutes sortes de sens. Entrons dans quelques détails sur ce nouveau sujet.

SECTION I.

Propriétés générales de l'équilibre des fluides élastiques.

PROPOSITION I.

59. *Si à tous les points de la surface d'une masse fluide élastique, non pesante, sont appliquées perpendiculairement des puissances égales, ces puissances sont en équilibre.*

Cela est, comme l'article 27, une suite évidente de la parfaite mobilité des parties du fluide, & de

la preſſion égale que chaque particule ſouffre en toutes ſortes de ſens.

COROLLAIRE.

60. De-là réſultent des conſéquences analogues à celles des articles 28, 29, 30, 31, 32. Il eſt inutile de répéter des détails qui n'ont aucune difficulté.

PROPOSITION II.

61. *La ſurface (ſuppoſée parfaitement libre) d'un fluide élaſtique, peſant & en équilibre dans un vaſe ſolide ou flexible, eſt horiſontale.*

Même démonſtration que pour les articles 33 & 47.

COROLLAIRE.

62. On voit, comme dans les articles 35 & 48, qu'un fluide élaſtique doit ſe mettre de niveau dans les deux branches d'un ſyphon ſolide ou flexible.

PROPOSITION III.

63. *Quelles que ſoient les forces dont un fluide élaſtique puiſſe être animé; lorſqu'il a pris une forme permanente, la force élaſtique en chaque endroit de ſa maſſe eſt égale & contraire à la preſſion en ce même endroit.*

Car ſi ces deux forces n'étoient pas égales & contraires, la plus grande l'emporteroit ſur la plus petite, & il n'y auroit pas d'équilibre; ce qui eſt contraire à l'hypothèſe.

Corollaire I.

64. Donc ſi un fluide élaſtique après avoir été comprimé par une cauſe extérieure, devient libre & déploye ſon reſſort contre quelqu'obſtacle, l'effort qu'il exercera ainſi ſera égal à la force par laquelle il avoit été d'abord comprimé.

Corollaire II.

65. Soit un fluide élaſtique qui ſe comprime lui-même par ſon propre poids; par exemple, ſoit la colonne cylindrique & verticale $EKBA$ de fluide élaſtique, ſoumiſe à la ſeule action de ſa peſanteur; la force élaſtique d'une tranche quelconque $Mmba$, de hauteur infiniment petite, eſt égale au poids abſolu de la colonne ſupérieure $EKmM$, puiſque ce poids eſt la force comprimante de la tranche propoſée. Fig. 26.

Corollaire III.

66. Imaginons que la colonne $EKba$ eſt partagée en une infinité de tranches $abmM$, $Mmcd$, $cdef$, &c, & nommons p, p', p'', &c, les peſanteurs ſpécifiques de ces tranches : leurs peſanteurs abſolues ſeront repréſentées (17) par les produits $p \times abmM$, $p' \times Mmcd$, $p'' \times cdef$, &c. Ainſi puiſque le poids abſolu de la colonne $EKba$ eſt égal à la ſomme de ces mêmes produits, il s'enſuit que la force élaſtique de la tranche $abmM$ eſt égale à la ſomme des produits des volumes des tranches ſupérieures, multipliés chacun reſpectivement par la peſanteur ſpécifique de la tranche à laquelle il appartient.

PROPOSITION IV. PROBLEME.

Fig. 27. 67. *Trouver la preſſion qu'un fluide élaſtique peſant, contenu dans un vaſe* ANE, *exerce contre une partie quelconque* fyr *des parois ou du fond de ce vaſe?*

SOLUTION.

1°. Le fluide étant ſoumis à la ſeule action de ſa peſanteur, ſa ſurface *AE* eſt horiſontale (61).

2°. Ayant diviſé la ſurface *fyr* en une infinité d'élémens *fg*, *gx*, *xy*, &c, ſoient élevées les verticales *ft*, *gu*, *xz*, &c. Concevons enſuite que le fluide, ſur toute la hauteur compriſe depuis ſa ſurface juſqu'au point le plus bas de *fyr*, eſt partagé en une infinité de tranches horiſontales *AEea*, $aee'a'$, $a'e'e''a''$, &c, dont chacune aura néceſſairement même denſité, même peſanteur ſpécifique dans toute ſon étendue. Suppoſons de plus, ce qui eſt toujours permis, que les épaiſſeurs ou hauteurs verticales de toutes ces tranches ſont égales entr'elles. Maintenant, il eſt clair, comme dans l'article 37, que l'élément *fg* eſt preſſé perpendiculairement en chacun de ſes points avec une force égale au poids du filet vertical correſpondant; & comme tous les filets qui répondent à *fg* peuvent être cenſés avoir la même hauteur *ft*, il s'enſuit que ſi l'on nomme *P* la peſanteur abſolue du filet *ft*, la preſſion que ſouffre *fg* eſt exprimée par $fg \times P$. Or la peſanteur abſolue *P* eſt évidemment égale à la ſomme des poids des parties égales *tb*, *bd*, *dk*, &c qui compoſent le filet *ft*; & ces derniers poids qui ſont compris ſous

des volumes égaux, peuvent repréſenter (14) les peſanteurs ſpécifiques des tranches correſpondantes $AEea$, $aee'a'$, $a'e'e''a''$, &c. Ainſi il eſt clair qu'en nommant S la ſomme des peſanteurs ſpécifiques des tranches qui répondent à la hauteur ft, la preſſion que ſouffre fg eſt exprimée par $fg \times S$. Pareillement, ſi l'on nomme S', S'', &c, reſpectivement les ſommes des peſanteurs ſpécifiques des tranches qui répondent aux hauteurs gu, xz, &c, la preſſion de gx ſera exprimée par $gx \times S'$; celle de xy par $xy \times S''$, &c. Donc enfin la preſſion que ſouffre l'eſpace fini $fyr = fg \times S + gx \times S' + xy \times S'' +$ &c. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

68. Suppoſons, par exemple, qu'il faille déterminer la preſſion du fond horiſontal NQ dans le vaſe $ANQE$, & que les peſanteurs ſpécifiques des tranches ſoient entr'elles comme les hauteurs tb, td, tk, &c, comptées depuis la ſurface du fluide. Il eſt évident qu'il répond le même nombre de tranches à tous les points du fond NQ, & que leurs peſanteurs ſpécifiques compoſent une progreſſion arithmétique dont le nombre des termes eſt Nt. Donc ſi l'on nomme ϖ la peſanteur ſpécifique de la tranche appliquée immédiatement ſur le fond NQ, la ſomme des peſanteurs ſpécifiques de toutes les tranches ſera exprimée par $\left(\varpi + \frac{\varpi \times tb}{Nt}\right) \times \frac{Nt}{2}$, ou ſimplement par $\frac{\varpi \times Nt}{2}$, le terme $\frac{\varpi \times tb}{Nt}$ étant infiniment petit par Fig. 28.

rapport à ϖ. Par conséquent la pression du fond NQ $= NQ \times \frac{\varpi \times Nt}{2}$.

Appliquons cela à un exemple. Supposons la surface $NQ =$ 1 pied quarré ; la hauteur $Nt =$ 100 pieds ; & que la pesanteur spécifique ϖ soit $\frac{1}{800}$ de celle de l'eau. On aura d'abord $\frac{NQ \times Nt}{2} =$ 50 pieds cubes : & comme le pied cube d'eau pese 70 livres ; en multipliant 50 pieds cubes par $\frac{1}{800}$ de 70 livres, le produit $4\frac{3}{8}$ livres sera la valeur de la pression du fond NQ.

COROLLAIRE II.

Fig. 29. 69. Soit $ANQE$ un vase rectangulaire ; que les pesanteurs spécifiques des tranches soient proportionnelles aux hauteurs comme dans le Corollaire précédent, & qu'il s'agisse de trouver la pression que souffre la partie fr de la paroi verticale AN. Ayant partagé fr en une infinité d'élémens égaux fg, gx, xy, &c, je nomme ϖ la pesanteur spécifique du fluide à la profondeur Af, & j'observe que la pesanteur spécifique en $g = \frac{\varpi \times Ag}{Af}$; la pesanteur spécifique en $x = \frac{\varpi \times Ax}{Af}$, &c. De plus on voit, comme dans le Corollaire précédent, que la somme des pesanteurs spécifiques des tranches qui répondent à $Af = \frac{\varpi \times Af}{2}$; la somme des pesanteurs spécifiques

des tranches qui répondent à $Ag = \frac{\varpi \times Ag}{Af} \times \frac{Ag}{2}$; la ſomme des peſanteurs ſpécifiques des tranches qui répondent à $Ax = \frac{\varpi \times Ax}{Af} \times \frac{Ax}{2}$; &c. Donc la ſomme des preſſions que ſouffrent toutes les parties de $fr = fg \times \frac{\varpi \times Af}{2} + gx \times \frac{\varpi \times Ag}{Af} \times \frac{Ag}{2} + xy \times \frac{\varpi \times Ax}{Af} \times \frac{Ax}{2} +$ &c. $= \frac{\varpi}{2Af} \times (fg \times \overline{Af}^2 + fg \times \overline{Ag}^2 + fg \times \overline{Ax}^2 +$ &c). Or les produits $fg \times \overline{Af}^2$, $fg \times \overline{Ag}^2$, $fg \times \overline{Ax}^2$, &c croiſſant comme les quarrés des lignes Af, Ag, Ax, &c, ou dans le rapport des élémens d'un tronc de pyramide à baſes parallèles, on aura $fg \times \overline{Af}^2 + fg \times \overline{Ag}^2 + fg \times \overline{Ax}^2 +$ &c. $= \frac{\overline{Ar}^3 - \overline{Af}^3}{3}$. Donc la ſomme des preſſions contre $fr = \frac{\varpi}{2Af} \times \frac{(\overline{Ar}^3 - \overline{Af}^3)}{3} = \frac{\varpi(\overline{Ar}^3 - \overline{Af}^3)}{6Af}$.

Cette quantité n'eſt que de deux dimenſions en regardant ϖ comme un nombre, parce qu'on n'a conſidéré dans le calcul que la dimenſion verticale de l'eſpace fr. Or cet eſpace étant ſuppoſé rectangulaire, ſi l'on nomme A ſa dimenſion horiſontale, la preſſion qu'il ſouffre dans toute l'étendue de ſa ſurface, ſera exprimée par $\frac{\varpi \times A \times (\overline{Ar}^3 - \overline{Af}^3)}{6Af}$.

Soient $A = 10$ pieds, $Ar = 100$ pieds, $Af =$

50 pieds, & que ϖ ſoit $\frac{1}{800}$ de la peſanteur ſpécifique de l'eau, comme tout-à-l'heure. On trouvera

$$\frac{\varpi \times A \times (\overline{Ar}^3 - \overline{Af}^3)}{6Af} = 2552 \tfrac{1}{12} \text{ livres.}$$

On peut multiplier ſans fin ces Corollaires à l'aide de la Géométrie.

REMARQUE I.

70. On voit par le problême général & par les applications que nous venons d'en faire, que connoiſſant la loi qui règne entre les peſanteurs ſpécifiques ou les denſités des tranches d'un fluide élaſtique peſant, on peut déterminer géométriquement la preſſion qu'il exerce ſur une ſurface donnée. Mais ces ſortes de déterminations peuvent rarement être appliquées à la pratique, parce qu'elles ſont fondées ſur des hypothèſes ſouvent précaires, & toujours un peu incertaines. Le moyen le plus ſûr eſt donc alors de recourir à l'expérience. Ayant trouvé par cette voie la preſſion qu'un fluide élaſtique exerce ſur une ſurface horiſontale donnée, on conclura par une ſimple proportion la preſſion qu'il exercera contre toute autre ſurface horiſontale, ou même verticale ou inclinée, en ſuppoſant que ſa denſité demeure la même, ou ſenſiblement la même, dans tous les cas.

Du reſte, quelque moyen qu'on employe pour déterminer ces ſortes de preſſions, on doit remarquer qu'elles ſuivent, quant à leurs effets, la même loi que celles des fluides incompreſſibles. Ainſi nous pouvons conclure, d'après le principe général de

l'article 45, que deux colonnes fluides élastiques, de même que deux colonnes fluides incompressibles, sont en équilibre, lorsque les pressions qu'elles exercent sur leurs bases, sont proportionnelles à ces mêmes bases. Cette loi qui s'étend au cas où les deux colonnes fluides ne seroient pas de même espèce, fait voir que si ces deux colonnes sont de même espèce, & qu'elles ayent la même densité, elles seront toujours en équilibre, quelque rapport qu'il y ait entre leurs bases; car alors leurs pressions sont évidemment proportionnelles à ces mêmes bases; ce qui revient à l'article 35, & ce qui est du plus grand usage dans la théorie des *pompes* & des autres machines pareilles, comme on le verra ci-dessous.

REMARQUE II.

71. Si un fluide élastique, outre l'action de sa pesanteur propre, éprouvoit encore celle d'une force extérieure, on trouveroit l'effort résultant contre les parois du vase, en considérant que l'action de la force extérieure se distribue également à tous les points du fluide, & combinant cette force avec celle qui provient de la pesanteur, comme on a fait pour les fluides incompressibles.

SECTION II.

De l'équilibre de l'air.

72. L'air étant de tous les fluides élastiques le plus connu, le plus répandu, le plus utile à nos

besoins, il mérite que nous examinions en particulier ses propriétés avec quelque détail. Or pour traiter cette matière dans la rigueur géométrique, il faudroit connoître exactement la figure des molécules aëriennes, & la loi précise suivant laquelle elles se compriment ou se dilatent, par le froid, par le chaud ou par d'autres causes physiques ; mais nous n'avons là-dessus que des notions assez imparfaites. On ne doit donc pas attendre ici une théorie mathématique & rigoureuse. Je ne me permettrai point d'hypothèse sur ce sujet, & je ne proposerai presque que des raisonnemens physiques, appuyés sur l'expérience.

PROPOSITION I.

73. *L'air est un fluide pesant.*

La pesanteur est une force universelle, répandue dans la nature, & il n'y a point de corps qui ne lui soit soumis. Cependant les anciens n'ont pas connu la pesanteur de l'air. Galilée la soupçonna au commencement du siécle passé ; mais son Disciple Torricelli fut le premier qui la démontra en l'année 1643.
Fig. 30. Il prit un tuyau de verre *AB*, d'environ 3 pieds de longueur, ouvert par le bout *A* & fermé exactement par le bout *B* ; il le renversa pour le remplir de mercure, évitant autant qu'il pouvoit d'y faire entrer ou d'y laisser de l'air ; ensuite ayant bouché le bout *A* avec le doigt, il mit le tuyau dans une position verticale, le bout *B* étant en haut ; il plongea le bout *A* dans un vase *MCDN*

qui contenoit déja du mercure, & ôtant le doigt il abandonna le mercure contenu dans le tuyau à l'action de ſa peſanteur. Alors la colonne *AE* de mercure contenu dans le tube demeura élevée au-deſſus du niveau *MN* du mercure contenu dans le vaſe *MCDN*, d'environ 28 pouces. De-là Torricelli conclut avec raiſon que la colonne de mercure demeure ainſi ſuſpendue dans le tube, en vertu de la preſſion de l'air extérieur ſur la ſurface du mercure contenu dans le vaſe *MCDN*, preſſion qui n'a pas lieu ſur la colonne contenue dans le tube dont le bout ſupérieur eſt fermé hermétiquement. En effet, ſi l'on caſſe légérement le bout ſupérieur du tube pour permettre à l'air d'y entrer, la colonne tombe auſſi-tôt & ſe répand dans le vaſe. Nos Baromètres ordinaires ne ſont autre choſe que le tube de Torricelli en expérience continuelle.

M. Paſcal a démontré la même propoſition par pluſieurs autres expériences dont on peut voir le détail dans *ſon Traité de l'équilibre des Liqueurs*, & dans pluſieurs livres de Phyſique.

Nous verrons ci-deſſous, en parlant plus particuliérement du Baromètre, que la hauteur du mercure dans cet inſtrument eſt ſujette à pluſieurs variations locales & phyſiques.

COROLLAIRE I.

74. L'air étant ainſi peſant, & ſa preſſion ſur chaque point de la ſurface de la terre, étant équivalente au poids d'un filet de mercure, dont je ſup-

poſe qu'on connoiſſe la hauteur moyenne, il eſt facile de trouver le poids de toute la maſſe d'air qui environne le globe terreſtre. Car ſoient *R* le raïon du globe terreſtre, *r* la hauteur donnée du filet de mercure dont on vient de parler, π le rapport de la circonférence au diamètre; ϖ la peſanteur ſpécifique du mercure. On cherchera les ſolides de deux ſphères dont l'une a pour raïon $R+r$, l'autre R; & on retranchera le ſecond ſolide du premier; ce qui donnera $\frac{4\pi(R+r)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$, ou

$4\pi(R^2 r + r^2 R + \frac{r^3}{3})$ pour reſte. On multipliera ce reſte par ϖ, & obſervant que les termes qui contiennent r^2 & r^3, peuvent être négligés ſans craindre d'erreur ſenſible, on aura $4\varpi\pi R^2 r$ pour l'expreſſion générale & très-approchée du poids demandé.

Par exemple, ſoient $r = 28$ pouces; le poids d'un pied cube de mercure $= 960$ livres. Suppoſons de plus, ſuivant les obſervations, que chaque degré d'un grand cercle de la terre eſt de 57000 toiſes. On trouvera, en effectuant tous les calculs indiqués par la formule précédente, que le poids total de l'atmoſphère eſt de 11028854877090909091 liv. environ.

COROLLAIRE II.

75. Deux colonnes, l'une de mercure, l'autre d'eau qui ſe font mutuellement équilibre, ont des hauteurs réciproquement proportionnelles à leurs peſanteurs ſpécifiques (46); enſorte que ſi la colonne de mercure

a 28 pouces de hauteur, celle d'eau doit avoir environ 32 pieds de hauteur. Or la preſſion de l'atmoſphère contrebalance la première de ces deux colonnes, comme nous venons de le voir; donc elle contrebalancera auſſi la ſeconde. Ainſi dans le vuide la preſſion de l'atmoſphère doit ſoutenir une colonne d'eau d'environ 32 pieds de hauteur.

Cela ſe confirme par l'expérience. Soit *QH* un tuyau ou corps de pompe vertical, plongé dans l'eau *MCDN* par le bout Q qui eſt ouvert. Qu'on faſſe gliſſer de bas en haut le long du tuyau un piſton *KO* qui en rempliſſe exactement la capacité: l'eau montera dans le tuyau, juſqu'à ce qu'elle ſoit élevée audeſſus du niveau *MN*, d'environ 32 pieds; après quoi elle s'arrêtera, quoique le piſton continue de monter. On en voit la raiſon. Le piſton en montant laiſſe après lui un vuide dans lequel l'air extérieur ne peut pas entrer, & la preſſion libre de cet air ſur la ſurface *MN* du réſervoir, force l'eau à paſſer par l'ouverture Q & à s'élever dans le tuyau. L'eau s'arrête à la hauteur de 32 pieds, parce qu'alors ſon poids eſt en équilibre avec la preſſion de l'atmoſphère. Fig. 31.

COROLLAIRE III.

76. Suppoſons que dans l'expérience précédente l'eau ſoit parvenue à la hauteur *AB* de 32 pieds; qu'enſuite on élève encore le piſton, & qu'il ſe faſſe entre la ſurface *BT* de l'eau & la baſe du piſton un vuide tel que *BP*. Cela poſé, ſi l'on fait entre les

points *A* & *B* une ouverture latérale *E* au tuyau, l'air extérieur entrera avec force par cette ouverture, & divisera en deux parties *AF*, *ET* la colonne *AT* qui est composée de molécules très-mobiles. La première *AF* retombera par sa pesanteur dans le réservoir *MCDN*, parce que la pression de l'air qui entre par *E* est en équilibre avec la pression de l'air qui tend à faire monter l'eau par le bout Q du tuyau. Mais la seconde partie *ET* étant poussée par l'air qui entre par *E* & qui agit en toutes sortes de sens, de bas en haut comme de haut en bas, montera nécessairement dans l'espace vuide *B P* qui est au-dessus. Il en est de cette élévation de la colonne *ET* comme de la suspension de l'eau contenue dans une bouteille renversée dont le goulot est ouvert. L'eau est soutenue dans la bouteille par la pression de l'air extérieur contre le goulot.

Ce Corollaire peut se confirmer par une expérience qui a été faite depuis peu. Voici quelle en a été l'occasion. En 1766 (*a*), un Ferblantier de *Seville* entreprit de faire monter l'eau à la hauteur de 60 pieds par le moyen d'une pompe aspirante; mais comme l'eau ne montoit pas, contre l'espérance du Ferblantier, il donna de dépit un coup de marteau au tuyau d'aspiration, & y fit un trou d'environ une ligne de diamètre à 10 pieds au-dessus du réservoir. Alors en continuant de pomper, l'eau monta à la hauteur désirée de 60 pieds. Plusieurs Physiciens en France & dans les Pays étrangers ont fait la même expé-

(*a*) Mercure de France, Février 1767.

rience, ou d'autres équivalentes. Ils ont trouvé qu'à un certain déchet près, il ſort par le dégorgeoir la valeur de la colonne *E T* : après quoi le flux ceſſe, & il faut recommencer à pomper, en bouchant l'ouverture *E*. Le déchet dans le produit de la pompe eſt occaſionné par la réſiſtance du frottement que l'eau éprouve en montant dans le tuyau. D'ailleurs il entre néceſſairement par l'ouverture *E* de l'air qui ſe méle avec l'eau, & qui détruit par la réaction de ſon reſſort une partie de l'effet de l'air extérieur. On voit qu'en fermant & ouvrant alternativement le trou *E*, on peut faire une eſpèce de pompe qui élève l'eau très-haut ; mais elle donne peu d'eau, & ſon flux eſt trop intermittent.

On trouvera ci-deſſous la manière de déterminer la hauteur à laquelle l'air qui entre par l'ouverture *E* pourroit élever la colonne *E T* dans le vuide.

COROLLAIRE IV.

77. Soit *A B O* le ſyphon dont on ſe ſert ordinairement pour mettre d'une manière fort ſimple des tonneaux de liqueur en vuidange. Cet inſtrument eſt compoſé de deux branches inégales *A B*, *B O*. On plonge la plus courte *A B* dans un tonneau ou en général dans un vaſe *M C D N* qui contient de la liqueur ; & ayant vuidé d'air le tuyau, par la ſuction ou autrement, la liqueur monte dans ce tuyau & ſort par l'orifice *O* juſqu'à ce que le vaſe ſoit entièrement vuidé, pourvû que le point *O* ſoit plus bas que le fond du vaſe. Fig. 52.

Il eſt aiſé d'expliquer cet effet. Imaginons pour cela que le bout O du tuyau eſt plongé dans un vaſe EF qui contient de la liqueur. On voit que chacune des parties AB, BO du ſyphon peut être regardée comme un tube particulier, pareil à celui de Torricelli. Ainſi en repréſentant la preſſion de l'atmoſphère par KX, le poids de la colonne fluide AB par KV, celui de la colonne BO par KZ, il eſt clair que VX exprime la force qui ſoulève le fluide dans le tuyau AB, & que ZX exprime la force qui tend à ſoulever le fluide dans le tuyau OB. Or comme ces deux dernières forces ſont contraires, la plus foible eſt détruite; & ZV eſt la force reſtante qui produit l'écoulement dans le ſens ABO.

On voit par-là 1°. que ſi $KV = KZ$, il ne peut pas y avoir d'écoulement. 2°. Que ſi le poids de la plus courte branche eſt plus grand que celui de l'atmoſphère, il n'y aura pas d'écoulement, parce qu'alors la preſſion de l'atmoſphère n'a pas la force ſuffiſante pour ſoulever la liqueur juſqu'en B. Ainſi, par exemple, ſi la liqueur eſt de l'eau, il faut que la hauteur de la plus courte branche AB ſoit de moins de 32 pieds; pour le mercure, AB doit être moins de 28 pouces, &c.

Les trois forces KX, KV, KZ peuvent avoir entr'elles d'autres relations qui ſont ici inutiles à conſidérer.

PROPOSITION II.

78. *L'air eſt un fluide élaſtique.*

Qu'on prenne une veſſie & qu'on la gonfle en y

introduisant de l'air : on aura un ballon qui se comprime lorsqu'on le presse, & qui se dilate lorsqu'on cesse de le presser. Donc, &c.

PROPOSITION III.

79. *La force élastique de l'air comprimé, est égale à celle qui a produit la compression.*

Cela est une suite évidente des articles 63, 64.

COROLLAIRE.

80. Entr'autres preuves expérimentales qu'on a de cette proposition, la fontaine de *Heron* en fournit une bien sensible. Cette machine est composée d'une caisse *ABCD* fermée de tous côtés, pleine d'eau jusqu'en *EF* un peu au-dessous de *AB*; d'une autre caisse *GHKI*, aussi fermée de tous côtés, égale à la première, & pleine d'air; d'un tuyau *OT* soudé exactement avec les platines *AB*, *DC*, *GH*, qui communique au dehors par le bout *O*, & avec la caisse inférieure par le bout *T* qui est très-près du fond *IK*; d'un tuyau *XY* soudé aux deux caisses, & dont le bout supérieur *X* est près du fond *AB*; d'un tuyau *QP* dont le bout inférieur *P* est proche le fond *DC*, & le bout supérieur *Q*, soudé avec le fond *AB*, est garni d'un ajutage. Cela posé, fermez l'ajutage *Q* avec le doigt, & versez un peu d'eau par le bout *O* du tuyau *OT*; elle descendra jusqu'en *IK*, & montera, par exemple, en *VS*. Alors il n'y aura plus aucune communication de l'air extérieur avec celui qui reste dans les deux caisses. Continuez à Fig. 33.

verser de l'eau ; l'air contenu dans les espaces *GHSV*, *ABFE*, *XY* se condensera peu-à-peu jusqu'à ce que sa force élastique soit en équilibre avec la pression de l'eau versée par *OT*. Si la surface de l'eau dans la caisse *GHKI* est *MN*, l'air dont on vient de parler pressera perpendiculairement chaque partie de la surface qui l'environne avec une force égale au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour base la partie pressée, & *OL* pour hauteur. Ainsi la surface *EF* de l'eau contenue dans la caisse supérieure, est poussée de haut en bas par ce même air, & tend à s'élever par le tuyau *PQ*; de sorte que si l'on ôte le doigt de dessus l'ajutage, il sortira un jet d'eau qui s'élevera à la hauteur *RZ* égale à *OL*. On voit donc que le ressort de l'air produit le même jet que produiroit le poids de l'eau par lequel il a été comprimé.

On peut remarquer qu'en faisant rentrer par *O* l'eau qui tombe du jet, cette eau passe dans la caisse inférieure, & que par conséquent le jet durera jusqu'à ce que toute l'eau comprise depuis le point *P* jusqu'en *EF* soit sortie en jaillissant.

PROPOSITION IV.

81. *L'air se comprime lui-même par son propre poids.*

Car l'air étant un fluide pesant, si l'on conçoit l'atmosphère partagée en une infinité de tranches, ou plutôt de couches perpendiculaires à la direction de la pesanteur, il est évident que les couches infé-

rieures ſeront chargées du poids des ſupérieures; d'où réſultera néceſſairement une compreſſion qui ſera d'autant plus grande, toutes choſes d'ailleurs égales, que la couche comprimée ſera placée plus bas dans l'atmoſphère.

Je dis *toutes choſes d'ailleurs égales*, car il y a d'autres cauſes, comme le froid, & le chaud, qui concourent à comprimer & à dilater l'air. La denſité de ce fluide eſt extrêmement variable. Elle eſt environ huit ou neuf cent fois moindre que celle de l'eau ordinaire. Le rapport moyen de ces denſités, dans nos climats, peut s'exprimer ſenſiblement par la fraction $\frac{1}{850}$.

COROLLAIRE.

82. Il ſuit de-là & de l'article 79, que ſi l'air après s'être comprimé lui-même par ſon propre poids, vient à agir par ſon ſeul reſſort, il produira le même effet qu'il produiſoit par ſon poids. Cela eſt confirmé par l'expérience que voici.

Prenez une bouteille de verre *ABCD* de figure cylindrique; verſez-y du mercure *AEFD*; faites-y entrer un petit tuyau de verre *K* de 29 ou 30 pouces de hauteur, ouvert par les deux bouts, & dont celui d'en bas trempe de quelques lignes dans le mercure; ſcellez ce tuyau exactement au cou de la bouteille, de maniere que l'air contenu dans l'eſpace *EBCF* n'ait aucune communication avec l'air extérieur; mettez enſuite cette bouteille & ſon tuyau ſous le récipient *LIHM* de la machine pneumati- Fig. 34.

que; pompez, autant qu'il ſera poſſible, l'air contenu dans ce récipient; alors le mercure s'abaiſſera en *NO*, & il s'élevera dans le tuyau au-deſſus de *NO*, à peu près à la même hauteur qu'il ſe ſoutient dans le Baromètre, dans l'endroit où l'on fait l'expérience. La raiſon en eſt évidente; car avant que de commencer à faire le vuide dans la machine pneumatique, l'air contenu dans l'eſpace *EBCF* eſt dans le même état que l'air extérieur; lorſqu'enſuite on vient à faire le vuide ſous le récipient, le même air *EBCF* déploye ſon reſſort, force en conſéquence le mercure à s'abbaiſſer en *NO* & à monter dans le tuyau vuide; & cette aſcenſion eſt à peu près égale à celle qui eſt produite dans le Baromètre par le poids de l'air. Je dis *à-peu près*, parce qu'il n'eſt jamais poſſible de vuider parfaitement d'air le récipient de la machine pneumatique.

PROPOSITION V.

83. *Si l'on comprime une même maſſe ou quantité d'air, & qu'on la réduiſe à occuper différens eſpaces ou volumes, ces volumes ſeront entr'eux en raiſon inverſe des forces comprimantes.*

Cette propoſition ſe prouve par l'expérience ſuivante, qui eſt très-connue des Phyſiciens, & que
Fig. 35. M. Mariotte a faite le premier. Soit *ABC* un tuyau de verre recourbé, fermé hermétiquement par le bout *C*, & ouvert par le bout *A*. Les deux branches *DA*, *EC* ſont verticales; mais la branche *DE* de jonction eſt horiſontale. On donne ordinairement trois ou quatre lignes de diamètre intérieur à ce tuyau.

La petite branche *E C* doit être parfaitement cylindrique pour pouvoir comparer exactement entr'eux les différens volumes de la masse d'air qu'on y condense. Nous supposons qu'elle ait 12 pouces de hauteur; l'autre *D A* est beaucoup plus haute. Versez légèrement dans le tube un peu de mercure pour remplir la branche horisontale, & faites ensorte que les deux surfaces *D V*, *I E* de ce fluide, dans les deux branches verticales, soient de niveau, afin que l'air enfermé dans l'espace *E C* soit dans le même état que l'air extérieur; car il est évident que si le ressort de l'air intérieur *E C* étoit plus ou moins tendu que celui de l'air extérieur, les surfaces *I E*, *D V* seroient inégalement pressées, & que par conséquent elles ne pourroient pas être de niveau. Continuez ensuite à verser du mercure dans la branche *D A*, & vous verrez qu'à mesure qu'il s'élevera en *H*, la surface *E I* s'élevera en *F*. En supposant que la pression de l'atmosphère soit équivalente au poids d'une colonne de mercure, de 28 pouces de hauteur, vous trouverez que si, ayant mené l'horisontale *F G*, la hauteur $GH = 14$ pouces, on aura la hauteur *F C* de l'espace occupé par l'air $= 8$ pouces; si $GH = 28$ pouces, $FC = 6$ pouces; &c. Or il suit de-là que les différens volumes de l'air enfermé d'abord dans *E C* suivent la raison inverse des poids comprimans; car au premier instant où cet air ne supporte que la pression de l'atmosphère, il peut être regardé comme chargé du poids d'une colonne de mercure, haute de 28 pouces; lorsqu'on met ensuite dans la

branche DA du mercure à la hauteur de 14 pouces au-dessus de la ligne de niveau FG, la pression que souffre notre masse d'air est égale au poids d'une colonne de mercure, qui a 28 pouces + 14 pouces ou 42 pouces de hauteur ; lorsque la hauteur du mercure dans la branche DA au-dessus de $FG = 28$ pouces, la pression de la même masse d'air est égale au poids d'une colonne de mercure, qui a 28 pouces + 14 pouces + 14 pouces, ou en tout 56 pouces de hauteur, &c. D'où l'on voit que les poids comprimans étant représentés par les nombres 28, 42, 56, les volumes de la masse d'air sont exprimés par les nombres 12, 8, 6. Or on a ces différentes proportions, $12 : 8 :: 42 : 28$; $12 : 6 :: 56 : 28$; $8 : 6 :: 56 : 42$. Donc les volumes suivent la raison renversée des poids comprimans.

On fera des raisonnemens analogues pour des hauteurs de mercure qui suivroient tout autre rapport dans les deux branches du tube ; & ces raisonnemens, fondés sur l'expérience, aboutiront à la même conclusion finale.

Toutes ces expériences doivent être faites de manière que l'air enfermé en FC ait la même température que l'air extérieur, & que par conséquent son volume ne varie qu'à raison des poids comprimans. Sans cette précaution, le chaud & le froid n'agissant pas de même sur les deux airs, changeroient les résultats, & il seroit difficile de séparer, par une méthode sure & non hypothétique, leurs effets d'avec ceux des poids comprimans.

Corollaire I.

84. Sous même maſſe, les denſités ſont en raiſon inverſe des volumes (11). Donc les denſités d'une même maſſe d'air comprimée par différens poids, ſont directement proportionnelles à ces poids, ou (79) aux forces élaſtiques qu'elle a dans ces différens états.

Corollaire II.

85. Puiſque l'air ſe comprime lui-même par ſon propre poids (81), il s'enſuit que ſi une colonne verticale de l'atmoſphère a la même température ſur toute ſa hauteur, les denſités de ſes différens points formeront entr'elles une progreſſion géométrique; car ſi l'on imagine que la colonne dont il s'agit eſt compoſée d'une infinité de tranches horiſontales de même maſſe, la denſité de chacune de ces tranches eſt proportionnelle au poids dont elle eſt chargée (84). Or ce poids n'eſt autre choſe que la ſomme des poids des tranches ſupérieures. Donc la denſité de chaque tranche eſt proportionnelle à la ſomme des denſités des tranches ſupérieures. Ainſi les denſités des différentes tranches, en deſcendant, compoſent une ſuite telle que deux termes conſécutifs ſont entr'eux comme les ſommes des termes qui les précédent reſpectivement. Donc cette ſuite eſt une progreſſion géométrique.

Remarque I.

86. Toutes les expériences qu'on a faites ſur la compreſſibilité de l'air prouvent qu'une même maſſe

de ce fluide ſe comprime ſuivant la proportion des poids dont elle eſt chargée ; mais on doit obſerver que ces expériences ont pour objet des condenſations *moyennes ;* car il paroît que dans les cas extrêmes la règle ne ſçauroit être exacte. En effet, imaginons d'abord que la compreſſion augmente à l'infini : il faudroit que la condenſation augmentât de même, & qu'enfin l'air n'occupât plus qu'un eſpace infiniment petit. Or quelque figure qu'on attribue aux molécules aëriennes, il eſt clair que lorſque leurs reſſorts ont été comprimés juſqu'à ce que toutes leurs parties ſe touchent, l'impénétrabilité mutuelle de ces parties ne permet plus de compreſſion. Ajoutez que l'air peut être mêlé de parties dures, dénuées de reſſort, ou douées d'un reſſort très-imparfait. Si au contraire on ſuppoſe que la compreſſion diminue à l'infini, on ne peut pas ſuppoſer de même que l'air ſe dilate à l'infini ; car le reſſort parfait ou imparfait des molécules aëriennes ne peut avoir qu'une extenſion déterminée, & il eſt impoſſible de concevoir qu'une maſſe finie vienne à occuper un eſpace infini. Il n'eſt donc pas vrai en rigueur que les condenſations de l'air ſuivent généralement le rapport des poids comprimans. Mais comme les forces comprimantes que nous pouvons employer dans nos expériences, ne paſſent jamais certaines limites, la propoſition de l'article 83 peut alors être regardée comme vraie ſans reſtriction. MM. Godin, Bouguer & de la Condamine en ont éprouvé la vérité en Amérique, par un très-grand nombre d'ex-

périences variées de différentes manières, qu'ils ont faites à la Martinique, à S. Domingue & au sommet des plus hautes montagnes du Pérou. Voyez dans les Mém. de l'Acad. an. 1753, un écrit de M. Bouguer, sur les dilatations de l'air dans l'atmosphère.

REMARQUE II.

87. De la propriété qu'a l'air de se condenser ainsi, suivant la proportion des poids comprimans, il résulte, comme nous l'avons vu (85), qu'en supposant les différentes couches de l'atmosphère soumises aux seules actions de la pesanteur & de l'élasticité, leurs densités formeroient entr'elles une progression géométrique. Mais dans l'état physique des choses, cette progression n'a pas lieu généralement, comme nous le verrons ci-dessous par l'expérience. Lorsque le chaud ou le froid vient à varier d'une couche à l'autre, l'équilibre de l'air est troublé, il s'y établit des courans ou des *vents* en différens sens, & la densité de ce fluide participe nécessairement à ces variations.

SECTION III.

Quelques applications de la théorie précédente.

88. Nous avons déja fait plusieurs applications de la théorie. En voici d'autres qui, par leur utilité ou leur étendue, m'ont paru mériter d'être traitées à part. Elles ont des objets différens, quoique dépen-

dantes des mêmes principes. Tout ordre eſt donc ici arbitraire ; je m'attacherai à être clair dans celui que j'ai adopté.

Sur les dilatations de l'air dans la Machine Pneumatique.

89. Il eſt inutile de décrire ici en détail la machine pneumatique ; tout le monde la connoît. Nous obſerverons ſeulement que ſes principales pièces ſont le récipient, la platine, le corps de pompe, le piſton qui ſe hauſſe & ſe baiſſe le long du corps de pompe, & un robinet percé de manière qu'étant tourné dans un certain ſens, il permet la communication du récipient avec le corps de pompe ſans la permettre avec l'air extérieur ; & qu'étant tourné dans un autre ſens il permet la communication de l'air extérieur avec le corps de pompe, ſans la permettre avec le récipient.

90. Cela poſé, ayant nommé A la ſomme des capacités du récipient & de la partie ſupérieure du corps de pompe qui demeure vuide lorſque le piſton eſt hauſſé ; B la ſomme des capacités du récipient & du vuide du corps de pompe, lorſque le piſton eſt baiſſé ; n le nombre de fois qu'on fait jouer le piſton ; $\frac{m}{1}$ le rapport de la denſité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur & raréfié après le nombre n de coups de piſton : ſuppoſons qu'au premier inſtant le piſton ſoit hauſſé, le robinet ouvert en dehors & fermé du côté du récipient ; qu'alors on applique le réci-

pient ſur la platine. Il eſt clair qu'en ce moment la denſité de l'air contenu dans l'eſpace *A* eſt la même que celle de l'air extérieur ; je la repréſente par *D*. Maintenant ſi l'on ferme le robinet en dehors, qu'on l'ouvre du côté du récipient, & qu'on baiſſe le piſton; l'air contenu dans l'eſpace *A* ſe dilatera en vertu de ſa force élaſtique, & ſe répandra uniformément dans l'eſpace *B*. Ainſi la denſité qu'il aura dans l'eſpace *B*, ſera à la denſité qu'il avoit dans l'eſpace *A*, réciproquement comme *A* eſt à *B*; car la maſſe étant la même, la denſité eſt réciproquement proportionnelle au volume (11). Faiſant donc cette proportion $B : A :: D$: à un quatrième terme; ce quatrième terme $D \times \frac{A}{B}$ exprime la denſité de l'air intérieur après le premier coup de piſton. Pareillement ſi après avoir fermé le robinet du côté du récipient, ouvert le robinet en dehors, & élevé le piſton, on ferme le robinet en dehors, qu'on l'ouvre du côté du récipient & qu'on abbaiſſe une ſeconde fois le piſton, l'air contenu dans l'eſpace *A*, & dont la denſité eſt $D \times \frac{A}{B}$, ſe répandra dans l'eſpace *B*, de manière que faiſant cette proportion $B : A :: D \times \frac{A}{B}$: à un quatrième terme, ce quatrième terme $D \times \frac{A^2}{B^2}$ exprime la denſité de l'air intérieur, après le ſecond coup de piſton. En continuant à raiſonner de même, on voit que la denſité de l'air intérieur après le troiſième coup de piſton, eſt exprimée par

$D \times \frac{A^3}{B^3}$; que la denſité après le quatrième coup de piſton eſt exprimée par $D \times \frac{A^4}{B^4}$; & qu'après le nombre n de coups de piſton la denſité eſt exprimée par $D \times \frac{A^n}{B^n}$. On aura donc, par hypothèſe, cette proportion $D : D \times \frac{A^n}{B^n} :: m : 1$; d'où l'on tire $m \times A^n = B^n$. Prenant les logarithmes de chaque membre, on aura log. $(m \times A^n) =$ log. B^n. Or on ſçait que le logarithme d'un produit eſt égal à la ſomme des logarithmes de ſes facteurs, & que le logarithme d'un nombre élevé à une puiſſance quelconque eſt égal au logarithme de ce nombre, multiplié par l'expoſant de la puiſſance. Ainſi l'équation précédente revient à celle-ci, log. m + n log. A = n log. B.

On voit que ſi parmi les quatre quantités m, n, A, B que cette équation renferme, on en connoît trois, on pourra trouver la quatrième; ce qui donne la ſolution des queſtions ſuivantes.

91. QUESTION I. *Connoiſſant les capacités* A & B, *& le rapport* m *de la denſité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, trouver le nombre* n *de coups de piſton?*

L'équation précédente donne celle-ci $n = \frac{\text{log. } m.}{\text{log. } B - \text{log. } A}$ qui réſoud la queſtion.

Par exemple, ſoient $A = 5$, $B = 7$, $m = 4$: on trouvera $n = \frac{60206}{14613} = 4\frac{1}{8}$ à peu près.

92. *Question II. Connoissant les capacités* A & B, *le nombre* n *de coups de piston, trouver le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur?*

Cette question se résoud par l'équation log. $m = n \times (\log. B - \log. A)$.

Par exemple, soient $A = 5$, $B = 7$, $n = 10$: on trouvera log. $m = 1,46128$, & par conséquent $m = 29$ environ.

93. *Question III. Connoissant le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, le nombre* n *de coups de piston, la capacité* A, *trouver la capacité* B?

Cette question se résoud par l'équation log. $B = \frac{\log. m + n \log. A}{n}$.

Par exemple, soient $m = 29$, $n = 6$, $A = 5$: on trouvera log. $B = 0,94270$, & par conséquent $B = 9$ environ.

94. *Question IV. Connoissant le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, le nombre* n *de coups de piston, la capacité* B, *trouver la capacité* A?

Cette question se résoud par l'équation log. $A = \frac{n \log. B - \log. m}{n}$.

Par exemple, soient $m = 29$, $n = 9$, $B = 7$, on trouvera log. $A = 0,68261$, & par conséquent $A = 5$ environ.

Construction & usages du Baromètre.

Fig. 30. 95. Cet instrument sert, comme nous l'avons déja remarqué (73), à mesurer le poids de l'air, ou plutôt les différens états de compression de l'atmosphère. Il y en a de plusieurs espèces; mais nous ne parlons ici que du Baromètre simple auquel ils se réduisent tous dans le fond, & qui n'est autre chose que le tube de Torricelli, appliqué contre une planche verticale divisée en pouces, à compter de la surface *M N* du mercure contenu dans la cuvette *MCDN*, & subdivisée en lignes ou demi-lignes dans sa partie supérieure. Ces graduations font connoître la marche du mercure, ou les variations qui arrivent dans la pression de l'atmosphère.

96. Puisque la force élastique de l'air est égale à celle qui le comprime (79), il est évident que si le ressort de ce fluide a été tendu par son seul poids, l'une ou l'autre force indifféremment soutiendra le mercure à la même hauteur dans le tube *A B*. De-là vient que dans une chambre bien fermée, ou sous une grande cloche de verre, posée sur une table horisontale, le mercure se tient à même hauteur dans le Baromètre, qu'en plein air. Cette suspension est produite par le ressort de l'air enfermé dans la chambre ou sous la cloche, lequel a été tendu par la pression de l'air extérieur, avant qu'on interrompît leur communication mutuelle.

97. Le tube d'un Baromètre doit avoir une certaine grosseur, par exemple, deux ou trois lignes de diamètre intérieur, afin que le mercure qui y est contenu

contenu n'éprouve pas trop ſenſiblement l'impreſſion de la chaleur qui tend à le dilater. Souvent les hauteurs de deux Baromètres dans un même endroit ne s'accordent pas enſemble, parce que l'effet de la chaleur ſur le mercure devient plus ou moins ſenſible, ſelon que le tube eſt plus ou moins étroit. A cette cauſe peuvent s'en joindre d'autres, comme quelque petite inégalité dans les peſanteurs ſpécifiques des deux mercures, la difficulté de les purger également d'air, les différentes aſpérités des parois des tuyaux, le vuide plus ou moins parfait dans leurs parties ſupérieures, &c.

98. En 1676, M. Picard s'apperçut que le mercure de ſon Baromètre ſecoué dans l'obſcurité, donnoit de la lumiere. On ne fit pas alors grande attention à cette expérience, parce qu'elle ne réuſſit point ſur pluſieurs autres Baromètres. Environ 25 ou 30 ans après, M. Jean Bernoulli la fit avec le ſien à Groningue, ignorant qu'il en eût été queſtion en France. Il la communiqua à l'Académie des Sciences. On la tenta de nouveau ſur un grand nombre de Baromètres faits avec ſoin, mais toujours ſans ſuccès. M. Bernoulli jugea qu'on ne prenoit pas des précautions ſuffiſantes; & d'après une théorie qu'il s'étoit faite, il indiqua les moyens qu'il crut propres à procurer une réuſſite infaillible. Cela produiſit une longue diſcuſſion. Je ne la rapporterai point ici, non plus que la théorie de M. Bernoulli. Ce détail me meneroit trop loin. Je me contenterai de remarquer qu'enfin M. Du Fay

parvint (Mém. de l'Académie, an. 1723) à faire ſûrement des Baromètres lumineux. Les conditions requiſes pour cet effet ſont, 1°. que le tuyau ſoit bien ſec, du moins dans ſa partie ſupérieure où la lumière doit paroître. On le nettoye aiſément avec du coton attaché au bout d'un fil de fer. 2°. Que le mercure ſoit bien pur, qualité qu'on lui procure en le faiſant paſſer dans un cornet de papier dont l'embouchure ſoit fort étroite, car il y dépoſe ſuffiſamment les ordures & parties étrangères dont il peut être chargé. 3°. Que ce même mercure ſoit bien purgé d'air. Pour cela, verſez d'abord dans le tuyau environ le tiers du mercure que vous devez employer, puis chauffez-le doucement & par degrés, l'approchant petit à petit du feu; remuez-le avec un fil de fer pour faciliter la ſortie des bulles d'air qui ſont dans le mercure & que la chaleur pouſſe dehors. Verſez un ſecond tiers auquel vous ferez de même, & enfin un troiſième auquel vous ne ferez rien, car la purification des deux premiers tiers ſuffit pour le tout. M. Du Fay ne s'eſt point apperçu qu'un différent degré de chaleur produisît de différence ſenſible dans la lumière. Ces ſortes de Baromètres ſont très-bons, & c'eſt ainſi qu'on les fait ordinairement aujourd'hui.

99. Suppoſé que, faute de précaution ou autrement, on eût enfermé de l'air dans l'eſpace EB, il ſeroit facile de trouver la relation entre la preſſion de l'atmoſphère, la hauteur AB du tube au-deſſus du niveau MN du mercure dans la cuvette,

la hauteur de l'eſpace que l'air enfermé occupoit naturellement dans le tube, & la hauteur à laquelle le mercure demeurera ſuſpendu au-deſſus du niveau *MN*. Car ſoit *BH* l'eſpace que l'air enfermé dans *BE* occuperoit dans ſon état naturel, c'eſt-à-dire, ſi le bout ſupérieur *B* du tube étoit ouvert, & qu'il communiquât avec l'air extérieur. La vertu élaſtique de cet air *BH* tend à le dilater en toutes ſortes de ſens. Or comme elle trouve un appui au bout *B* qui eſt fermé, elle repouſſe de haut en bas la colonne *AE* de mercure; & il eſt évident que cette colonne demeurera ſuſpendue, lorſque la ſomme faite de la force élaſtique de l'air dilaté dans *BE* & du poids de la même colonne *AE* de mercure, ſera égale à la preſſion de l'atmoſphère, c'eſt-à-dire au poids d'une colonne de mercure, dont je repréſente la hauteur par *h*. Maintenant, comme la force élaſtique de l'air naturel *BH* eſt toujours égale (79) à la force comprimante qui eſt ici le poids de l'atmoſphère, il eſt clair (83) que la force élaſtique de l'air dilaté *BE* ſera exprimée par $\frac{h \times BH}{BE}$. On aura donc l'équation $\frac{h \times BH}{BE} + AE = h$, ou bien $\frac{h \times BH}{AB - AE} + AE = h$, qui contient la relation demandée & qui fait voir que connoiſſant trois des quatre lignes *h*, *BH*, *AB*, *AE*, on parviendra à connoître la quatrième.

100. Revenons, & ſuppoſons que le Baromètre ait toute la perfection qu'on peut lui donner. On conçoit que plus un lieu eſt bas, plus la preſſion de l'atmoſphère eſt grande, & plus par conſéquent le mercure doit ſe tenir haut. Cela arrive en effet ainſi, lorſqu'aucune autre cauſe n'y met obſtacle. On ſçait que dans un même endroit la hauteur du mercure eſt ſujette à de frequentes variations, ſuivant les différens états de l'atmoſphère. Ordinairement le mercure ſe tient élevé lorſque le temps eſt beau, fixe, calme & ſec; & au contraire il s'abaiſſe quand le temps devient changeant, pluvieux, orageux, & que l'air eſt agité par de grands vents ou fort chargé de vapeurs. Les plus grandes hauteurs & les plus grands abaiſſemens du Baromètre arrivent toujours en hiver, & ces variations ſont en général plus ſenſibles dans les pays froids que dans les pays chauds. Si dans un beau temps le mercure vient à deſcendre, il y aura de la pluie ou du vent; ſi au contraire dans un temps pluvieux le mercure monte, c'eſt ſigne d'un prochain beau temps. Dans un temps fort chaud, la deſcente du mercure prédit le tonnerre. Dans un temps froid, l'aſcenſion du mercure annonce la gelée; & au contraire la deſcente du mercure, par un temps de gelée, prédit le dégel, &c. Voilà des faits généraux, connus de tout le monde; mais ils ſouffrent des exceptions, & l'on voit quelquefois des effets tout contraires à ceux que le Baromètre ſemble annoncer.

101. Les Phyſiciens ſe ſont donnés la torture pour trouver la cauſe des variations du Baromètre. Selon

M. Leibnitz, lorſque le temps eſt pluvieux, le mercure doit deſcendre, parce qu'alors les vapeurs ſoutenues par l'air venant à tomber, il en eſt moins preſſé, & devient par conſéquent plus léger. C'eſt ainſi, continue cet Auteur, que le fond d'un vaſe plein d'eau dans laquelle eſt plongé un corps ſolide un peu plus peſant ſpécifiquement que cette eau, eſt moins preſſé dans le temps que le corps deſcend, qu'il ne l'étoit lorſque ce même corps, ſuppoſé contenu d'abord ſous un plus grand volume, étoit immobile & ſoutenu par le fluide. Par une raiſon contraire, le mercure doit monter dans un temps calme & ſec. M. de Mairan attribue le phénomène en queſtion aux vents, ou en général aux agitations de l'air produites, ſoit par la chaleur du ſoleil, ſoit par celle du feu central qui, (ſelon lui) émane continuellement des entrailles de la terre, & dont l'action peut être modifiée par pluſieurs cauſes phyſiques & locales. M. Halley explique le même phénomène par la combinaiſon des vents qui règnent ſur la terre avec l'exhalaiſon & la précipitation des vapeurs flottantes dans l'air, & qui s'y trouvent en plus ou moins grande quantité dans un temps que dans un autre. Pluſieurs Phyſiciens font dépendre les variations du Baromètre de celles qui arrivent dans la force élaſtique de l'air; car la force élaſtique & la preſſion de l'air dans un même endroit, étant toujours égales entr'elles (79), on conçoit que ſi la force élaſtique vient à augmenter ou à diminuer, ſoit par le chaud ou par le froid, ou par quelque cauſe qui agite puiſ-

ſamment l'atmoſphère, la preſſion augmentera ou diminuera en même raiſon, & le mercure montera ou deſcendra. Il y a pluſieurs autres ſyſtèmes ſur ce ſujet. Je n'en connois aucun à l'abri de toute difficulté. Cela me diſpenſe de m'étendre davantage là-deſſus. Je viens à quelque choſe de plus utile.

102. Un uſage très-important du Baromètre, eſt celui qu'on en peut faire en certains cas pour trouver la différence des niveaux de pluſieurs points placés ſur la ſurface de la terre. Ceci demande à être expliqué.

Puiſqu'une même maſſe d'air ſe condenſe en raiſon du poids qui la comprime (84); ou ce qui revient au même, puiſqu'à volume égal la quantité d'air croît comme le poids comprimant, ſi l'on conçoit la hauteur de l'atmoſphère, partagée en une infinité de tranches de même épaiſſeur, il eſt clair (85) qu'à température égale les denſités de ces tranches forment entr'elles une progreſſion géométrique à laquelle répond la progreſſion arithmétique des hauteurs. Or les termes de la progreſſion géométrique peuvent être repréſentés par les élévations du mercure dans le Baromètre, puiſque le poids de la colonne de mercure eſt égal ou proportionnel, dans les mêmes circonſtances, à la preſſion de l'atmoſphère; & les termes de la progreſſion arithmétique peuvent être exprimés par les logarithmes des tables, qui forment en effet une progreſſion arithmétique lorſque les nombres auxquels ils répondent ſont en progreſſion géométrique. Par conſéquent la différence des logarithmes des deux élévations du mercure dans deux endroits propoſés, ſera propor-

tionnelle à la différence de niveau de ces deux endroits. Donc si l'on connoît d'avance par une mesure immédiate la hauteur d'un lieu au-dessus d'un autre, avec les élévations du mercure dans le Baromètre en ces deux endroits, on déterminera par une simple proportion la différence de niveau de deux autres endroits. Comparant ensuite plusieurs résultats de cette espèce avec les déterminations géométriques, on jugera si la méthode dont il s'agit, peut être employée avec quelque sûreté. Eclaircissons cela par des exemples.

EXEMPLE I.

M. Bouguer a trouvé (Mém. déja cité) que sur la montagne de Pitchincha, dans le Pérou, le mercure se soutenoit dans le Baromètre à 15 pouces 11 lignes, & qu'à Carabourou, extrémité septentrionale de la première base des triangles qui ont servi à déterminer la figure de la terre, il se soutenoit à 21 pouces 2 lignes $\frac{1}{4}$. Par une détermination géométrique, le premier poste est plus élevé que le second de 1208 toises.

D'après ces *données*, on demande la position de la montagne de Choussaï par rapport à Carabourou, en supposant, comme M. Godin l'a observé, que le mercure se soutenoit sur Choussaï à 17 pouces 10 lignes $\frac{1}{2}$.

L'élévation du mercure à Carabourou $= \frac{1019}{4}$ lignes dont le logarithme est 2, 4061142; l'élévation du mercure sur Pitchincha $=$ 191 lignes, dont le lo-

garithme eſt 2, 2810334. Retranchant ce logarithme du précédent, la différence eſt 0, 1250808.

L'élévation du mercure ſur Chouſſaï = 214, 5 lignes, dont le logarithme eſt 2, 3314273. Retranchant ce logarithme du logarithme de l'élévation du mercure à Carabourou, la différence eſt 0, 0746869.

Maintenant, je fais cette proportion, 1250808 : 746869 :: 1208 toiſes : à la hauteur de Chouſſaï, au-deſſus de Carabourou, qu'on trouvera de 722, 95 toiſes, réſultat qui ne diffère pas de 1 toiſe de celui que M. Godin a trouvé par une meſure géométrique.

EXEMPLE II.

On demande la poſition de Carabourou par rapport à un village nommé Alauſſy, qui eſt ſitué au pied de la montagne de Chouſſaï, & dans lequel le mercure ſe ſoutenoit à 21 pouces 1 ligne $\frac{1}{4}$, ſuivant l'obſervation du même M. Godin.

J'établis le calcul ſur les mêmes données que dans l'exemple précédent. Ainſi, après avoir retranché le logarithme de l'élévation du mercure à Alauſſy, du logarithme de l'élévation à Carabourou, ce qui donne 0, 0025648 pour reſte ; je fais la proportion 1250808 : 25648 :: 1208 toiſes : à la hauteur de Alauſſy au-deſſus de Carabourou, qu'on trouvera de 24, 78 toiſes, réſultat qui s'accorde, à très-peu de choſe près, avec la meſure géométrique.

103. On voit par ces deux exemples, que le Baromètre donne les poſitions reſpectives des lieux pro-

posés avec beaucoup de précision. M. Bouguer s'est servi avec le même succès de cette méthode dans tout le haut de la cordelière du Pérou. Plus un lieu est élevé, plus l'air est libre, dégagé des causes qui en troublent l'équilibre; & moins par conséquent la proportion naturelle de ses densités établie dans l'article 85, subit d'altération. Mais la méthode dont il s'agit, ne réussit point dans la partie inférieure de la cordelière. Elle ne réussit point non plus sur toutes les autres montagnes de la zone torride, & elle a encore moins de succès en Europe. Ainsi elle ne doit être employée qu'avec beaucoup de précaution, si l'on veut obtenir des résultats précis.

104. Nous finirons par observer qu'on peut déterminer, par les principes de l'article 102, la hauteur *ER* à laquelle l'air qui entre par le trou *E*, Fig. 31. dans l'expérience de la pompe de Sévile, peut soutenir l'eau dans le vuide; car il est clair que la colonne d'eau *ET* peut être regardée comme un poids qui réagit contre l'air inférieur qui le soutient. Il n'est pas moins clair que ce poids feroit équilibre à la pression de l'atmosphère en *RP*. Supposons donc, par exemple, que dans le lieu *A* où se fait l'expérience, la pression de l'atmosphère élève l'eau à 32 pieds dans le vuide, ou ce qui revient au même, le mercure à 28 pouces dans le Baromètre, & que la colonne d'eau *ET* soit de 24 pieds, ou équivalente à une colonne de mercure de même base & de 21 pouces de hauteur. La question proposée revient à ceci. On sçait que dans un lieu *A* le mercure se sou-

tient à 28 pouces dans le Baromètre ; on demande la hauteur d'un lieu *R* où le mercure ſe ſoutiendra à 21 pouces. On trouve le lieu *R* plus élevé que le lieu *A* de 1210 toiſes. La colonne d'eau *ET* s'éleveroit donc à cette hauteur, ſi elle ne donnoit point de paſſage à l'air à travers ſa maſſe, & ſi le frottement le long des parois du tuyau ne lui oppoſoit point de réſiſtance.

Du Thermomètre.

105. Le Thermomètre eſt un inſtrument de verre, dans lequel on enferme une liqueur élaſtique qui, en ſe dilatant par la chaleur, ou ſe condenſant par le froid, fait connoître les changemens de température qui arrivent dans l'atmoſphère. On attribue la première invention de cet inſtrument à Drebelius ou à Sanctorius. Elle ne remonte guères au-delà de l'année 1622.

106. Les premiers Thermomètres qu'on a conſtruits, étoient très-imparfaits. Ils conſiſtoient en une boule de verre creuſe & emmanchée d'un long tuyau ouvert. Après avoir chauffé la boule pour raréfier l'air intérieur, on plongeoit verticalement le tube dans un vaſe qui contenoit de l'eau commune, mêlangée d'un peu d'eau régale pour l'empêcher de geler en hiver, & de teinture de vitriol diſſous qui la coloroit de vert; enſuite on fixoit l'inſtrument dans cette poſition verticale, la boule en haut, le tube en bas, en l'attachant à une planche graduée. L'air contenu dans l'inſtrument ayant été raréfié par la cha-

leur, l'eau colorée s'élevoit dans le tube, & y conservoit ensuite une même hauteur, tant que la température de l'air extérieur ne changeoit pas. Mais quand le chaud ou le froid augmentoit, cette variation étoit indiquée par la descension ou l'ascension de l'eau contenue dans le tube, parce que la force élastique de l'air enfermé dans l'instrument venant à augmenter par le chaud, ou à diminuer par le froid, repoussoit en bas, ou laissoit monter l'eau contigue, soutenue par la pression de l'air extérieur sur la surface de l'eau du vase. On voit assez que la variation du poids de l'air extérieur, indépendamment du chaud ou du froid, contribuoit aussi à faire monter plus ou moins l'eau dans le tube, & que par conséquent ces Thermomètres ne donnoient pas une mesure précise du chaud & du froid.

107. Peu de temps après, l'Académie de Florence proposa un autre Thermomètre beaucoup plus exact. Il est composé d'une boule de verre garnie d'un tuyau ouvert d'abord par l'autre bout; on y met une certaine quantité d'une liqueur dilatable, comme, par exemple, de l'esprit de vin; ensuite ayant scellé hermétiquement le bout du tuyau, on attache l'instrument à une planche verticale & graduée, la boule en bas & le tube en haut. La liqueur enfermée dans le Thermomètre n'est plus en prise à la pression de l'atmosphère; elle indique par ses dilatations ou ses condensations les changemens de chaud ou de froid qui arrivent dans l'air. Mais il ne suffit pas d'avoir un instrument qui marque les variations

du chaud ou du froid dans un même lieu ; il faut pouvoir comparer le chaud & le froid d'un endroit avec ceux d'un autre, soit pour connoître la température relative de différens climats, soit pour être en état de faire par-tout un grand nombre d'expériences physiques & chymiques qui demandent un degré précis de chaud ou de froid. Ainsi la graduation de l'instrument doit partir de quelque terme fixe & connu qui puisse servir à régler la marche de différens Thermomètres, & à faire, par ce moyen, des observations correspondantes. L'Académie de Florence ne mit pas beaucoup de précision dans ce point essentiel. Elle prit pour terme de sa graduation la chaleur excitée par la plus grande ardeur des raïons du soleil dans ce pays-là ; ce qui est trop vague & un peu incertain.

108. M. Newton, dans un Mémoire qui a pour titre, *Scala graduum caloris & frigoris*, & qui est imprimé dans les Transactions Philosophiques pour l'année 1701, regarde comme des termes fixes la chaleur de l'eau bouillante, & le froid qui commence à geler l'eau. Il construit sur ce principe un Thermomètre avec de l'huile de lin, qui est une liqueur assez homogène, fort dilatable, supportant un grand froid avant que de se geler, & une grande chaleur avant que de bouillir. Ensuite, par le moyen de cet instrument & d'un fer rouge, il construit son *échelle*. Selon ses expériences & ses calculs, la chaleur extérieure du corps humain étant exprimée par 1, celle de l'eau bouillante l'est par 3 environ, celle de l'étain

fondu par 6, celle du plomb fondu par 8, &c. Si le Thermomètre étant plongé dans de la neige qui se fond, l'huile occupe alors un espace exprimé par 10000, cette même huile occupera, au premier degré de chaleur qui est toujours celle du corps humain, un espace 10256; à la chaleur de l'eau qui commence à bouillir, un espace 10705; à la chaleur de l'eau qui a bouilli quelque temps, un espace 10725; à la chaleur de l'étain fondant, un espace 11516; à la chaleur de l'étain bien fondu, un espace 11596, &c. Je ne suivrai pas plus loin cette table. Quoiqu'elle soit beaucoup plus exacte que tout ce qui avoit paru jusqu'alors sur le même sujet, nous observerons cependant qu'il y a un inconvénient à employer des huiles dans les Thermomètres ; ces matières grasses s'attachent aux parois du tube, & leur adhérence varie un peu par le froid & par le chaud; ce qui trouble la régularité de la marche du Thermomètre. De plus la chaleur de l'eau bouillante, lors même que l'eau a bouilli pendant quelque temps, n'est un terme fixe que quand l'atmosphère est dans un état fixe & déterminé ; car on observe que si le mercure est fort élevé dans le Baromètre, ou que la pression de l'atmosphère soit fort grande, l'eau s'échauffe plus difficilement, mais aussi acquiert un plus grand degré de chaleur, que lorsque le mercure est bas dans le Baromètre. Il y a aussi quelques variations dans la chaleur des métaux fondus.

109. M. Amontons, dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1702, prend pour terme fixe,

comme M. Newton, la chaleur de l'eau bouillante. Le Thermomètre qu'il propoſe eſt très-ingénieux & d'une eſpèce toute nouvelle. Malheureuſement l'Auteur prévenu par la mort n'a pas eu le temps de perfectionner & de ſimplifier, autant qu'il auroit pu le faire, cet inſtrument qui eſt peu en uſage & peu connu.

110. En 1709, Fahrenheit, célèbre Artiſte Hollandois, publia un Thermomètre à mercure, qui ne s'eſt répandu que fort tard en France. J'en parlerai ci-deſſous, lorſque j'aurai fait connoître briévement celui de M. de Reaumur, qui a ſervi & ſert encore tous les jours à faire un grand nombre d'obſervations météorologiques. La conſtruction de cet inſtrument eſt expoſée dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1730. Il eſt fait avec de l'eſprit de vin, & il a la même forme que les Thermomètres ordinaires de Florence; mais ceux-ci, tels que les Ouvriers les faiſoient ordinairement, avoient des défauts eſſentiels que M. de Reaumur s'eſt appliqué à corriger.

111. Nous avons déjà remarqué (107) que ces mêmes Thermomètres ne partoient pas d'un terme bien connu & bien déterminé de chaud & de froid. De plus en les graduant on prenoit pour degrés égaux de l'aſcenſion de la liqueur des parties égales de la longueur des tuyaux; ce qui ſuppoſoit que ces tuyaux fuſſent parfaitement cylindriques en dedans. Or il arrive très-ſouvent que les tuyaux ne ſont pas tels, à cauſe des différentes épaiſſeurs du

verre. Enfin on ne mettoit pas assez de choix dans la qualité de l'esprit de vin qu'on employoit, & on ne faisoit pas attention que cette liqueur se dilate plus on moins, selon qu'elle est plus ou moins rectifiée.

112. M. de Reaumur prend pour origine fixe & constante de sa graduation la congélation de l'eau, non la congélation naturelle; car on a éprouvé par les Thermomètres ordinaires que toutes les glaces naturelles ne sont pas également froides, mais la congélation artificielle qui se fait, comme on sçait, avec de la glace & des sels. Pour éviter toute erreur qui pourroit naître de la glace naturelle plus ou moins froide qu'on employe dans cette opération, l'Auteur fait la congélation dans un temps où l'air n'a aucune disposition à geler l'eau, & il prend pour terme fixe le moment où la première surface de l'eau commence à se geler artificiellement. Cette première action du froid ne peut manquer d'être toujours assez égale, & il ne peut guères survenir d'inégalités que dans la suite par une accélération plus ou moins forte.

113. Cela posé, M. de Reaumur gradue le Thermomètre de manière que les degrés égaux répondent non pas à des parties égales de la longueur du tuyau, mais à des parties égales du volume de la liqueur. Pour cela, il se procure des mesures très-exactes, les unes petites, les autres plus grandes qui contiennent 25 ou 50 ou 100 fois juste les petites, pour abréger; il employe dans cette opération prélimi-

naire de l'eau commune préférablement à l'eſprit de vin, de crainte que cette dernière liqueur ne s'échauffe & ne change de volume pendant le travail ; il verſe un nombre limité de parties égales d'eau, par exemple 1000 parties, juſqu'au point où l'on veut que le terme de la congélation ſoit marqué, & que l'on place ordinairement au tiers de la hauteur du tuyau à compter de la boule ; il continue enſuite à verſer de nouvelles parties égales, & il détermine les eſpaces qu'elles occupent ſur le tuyau. Quand la graduation eſt ainſi achevée, il jette l'eau ; & après avoir bien nettoyé & ſéché l'inſtrument, il plonge la boule dans la glace artificielle ; à l'eau il ſubſtitue de l'eſprit de vin en quantité ſuffiſante ſeulement pour arriver juſte au terme marqué pour la congélation ; enſuite le Thermomètre étant retiré de la glace & le bout du tuyau ayant été ſcellé, l'eſprit de vin, par ſon expanſion ou ſa contraction, indiquera les degrés de température au-deſſus ou au-deſſous du terme de la congélation artificielle.

114. Il eſt eſſentiel de connoître exactement la qualité de l'eſprit de vin qu'on employe. Car cette liqueur qui eſt, comme on ſçait, un mêlange d'eau ou flegme & d'une huile éthérée, ſubtile, inflammable, eſt plus ou moins dilatable, ſelon qu'elle eſt plus ou moins rectifiée, ou ſelon que la doſe d'huile eſt plus ou moins forte par rapport à celle de l'eau. Le meilleur eſprit de vin ou le plus dilatable que M. de Reaumur ait pu trouver chez les Marchands ordinaires, eſt tel que s'il eſt 400 par la congélation

tion artificielle de l'eau, il devient 435 par la chaleur de l'eau bouillante ; ce qui eſt le rapport de 80 à 87. Tout eſprit de vin eſt bon pour faire un Thermomètre, pourvu qu'on ait ſoin d'en conſtater la dilatabilité préciſe, & d'en tenir note ſur la planche même de l'inſtrument. M. de Reaumur donne les moyens de ramener deux eſprits de vin au même degré de dilatabilité, & de comparer enſemble les obſervations faites avec des Thermomètres dont les eſprits de vin ſeroient différens, lorſque le rapport de leurs dilatabilités eſt connu. On peut voir ces détails dans ſon Mémoire.

115. De l'aveu de tous les Phyſiciens, le Thermomètre de M. de Reaumur eſt très-bon pour faire des obſervations Météorologiques ; mais il n'eſt pas propre à indiquer des degrés conſidérables de chaleur, comme ceux des métaux fondus, ou même celui de l'eau bouillante ; car l'eſprit de vin très-échauffé, ou ne monte plus quoique la chaleur augmente encore, ou finit par bouillir. De plus cette liqueur en vieilliſſant, perd ſenſiblement ſa vertu expanſive & s'attache au tube.

116. Ces raiſons portent la plûpart des Phyſiciens à préférer les Thermomètres à mercure, parce que ce fluide a l'avantage de reſter toujours pur, & de conſerver ſa vertu expanſive, quelque vieux qu'il ſoit, de ſupporter une très-grande chaleur ſans bouillir, & de ne geler qu'à un froid exceſſif, pareil à celui auquel MM. de l'Académie de Pétersbourg ſoumirent ce même fluide dans leur fameuſe expé-

rience du 25 Décembre 1759. Les Thermomètres de ce genre, le plus en uſage aujourd'hui, ſont ceux de Fahrenheit & de M. Deliſle.

117. Dans le Thermomètre de Fahrenheit, le tuyau eſt très-mince, & ſe termine, non par une boule, mais par une bouteille cylindrique de capacité proportionnée. Selon M. Boerhave qui a beaucoup employé cet inſtrument dans ſes expériences chymiques, ſi l'on imagine que la maſſe totale de mercure qu'il contient eſt diviſée en 10782 parties, le mercure ſe dilate de 600 depuis le plus grand froid déterminé par Fahrenheit, juſqu'à ce qu'il parvienne à l'ébullition, en marquant zero au point du plus grand froid. Ce froid eſt produit par une congélation artificielle faite avec un mélange de ſel ammoniac ou de ſel marin, & de neige ou de glace pilée dont on entoure la boule. Le mercure ſe dilate de 32 parties depuis le terme zero juſqu'à celui de la congélation de l'eau, & de 212 parties depuis zero juſqu'à la chaleur de l'eau bouillante. Les degrés ſupérieurs ſervent à meſurer la chaleur des huiles bouillantes, de l'étain & du plomb fondus, &c.

118. Ce Thermomètre eſt difficile, long & diſpendieux à conſtruire en général; mais on en fait des eſpèces d'abrégés où l'on ne pouſſe pas la graduation ſi loin, & qui ſont très-bons pour les obſervations Météorologiques. Voici la conſtruction qu'en donne le Docteur Martine. Rempliſſez de mercure la boule & une petite portion du tube juſqu'à une hauteur telle que la boule étant plongée dans de la neige ou de la

glace fondante, il reſte au-deſſous du point où ſe tient le mercure, & que l'on marquera 32, aſſez d'eſpace pour remplir les diviſions juſqu'à zero. Enſuite plongez la boule dans l'eau bouillante; marquez 212 au point où le mercure s'arrêtera; diviſez l'eſpace compris entre les diviſions 212 & 32 en 180 parties ou degrés, & continuez la graduation dans cette proportion. Comme le tube peut n'être pas parfaitement cylindrique dans ſon intérieur, pour éviter les erreurs qui pourroient naître de-là dans la graduation, il n'y a qu'à introduire dans le tube un petit cylindre de mercure, lui faire parcourir ſucceſſivement toute l'étendue du tube, & marquer en même temps les limites qui le comprennent. On aura par ce moyen des diviſions égales, & l'on pourra réduire la graduation à toute l'exactitude poſſible.

119. La graduation de M. Deliſle eſt faite autrement. Il ſuppoſe que le volume du mercure, le Thermomètre étant plongé dans l'eau bouillante, eſt de 10 mille ou de 100 mille parties, & il marque en de telles parties au-deſſus & au-deſſous de ce point fixe tous les dégrés de chaleur correſpondans à tous les degrés poſſibles de dilatation & de condenſation. Ces diviſions ſont exprimées, contre l'ordinaire, par des nombres qui croiſſent à proportion que la chaleur décroît.

120. Tous ces inſtrumens ont un défaut eſſentiel & inévitable. Le verre eſt ſujet aux variations du chaud & du froid; il ſe dilate & ſe condenſe différemment à proportion de ſon épaiſſeur; ce qui

trouble la marche naturelle de l'eſprit de vin ou du mercure. De plus on doit obſerver que les degrés égaux d'un même Thermomètre indiquent des dilatations égales de la liqueur; mais on ne doit pas affirmer qu'ils indiquent des degrés égaux de chaleur. Car il peut ſe faire que la chaleur en augmentant ne ſuive pas exactement le même rapport que la liqueur en ſe dilatant. Il eſt très-poſſible qu'à meſure que la chaleur croît également, elle trouve plus ou moins de difficulté à dilater la même liqueur. Tout ce qu'on peut donc conclure, lorſqu'on voit monter la liqueur dans un Thermomètre, c'eſt que la chaleur augmente, mais non préciſément ſuivant quelle loi.

Ceux qui déſireront plus de détail ſur cette matière, pourrront conſulter l'ouvrage du Docteur Martine, qui a été traduit en françois ſous ce titre: *Eſſais ſur la conſtruction & comparaiſon des Thermomètres, &c.* (*Paris* 1751). M. Hennert a publié à la Haye en 1758 un *Traité des Thermomètres*, dans lequel il y a des recherches intéreſſantes ſur les moyens de perfectionner ces inſtrumens.

Des Pompes.

121. Les Pompes ſont des machines qui ſervent à élever l'eau, & dans leſquelles la preſſion de l'atmoſphère eſt un des principaux agens. Il y en a de trois eſpèces principales; la Pompe aſpirante, la Pompe foulante, & la Pompe qui eſt tout-à-la-fois aſpirante & foulante.

122. La Pompe *aſpirante* eſt compoſée de deux tuyaux verticaux *AKBC*, *CBDQ* qui s'uniſſent enſemble en *CB*. Le premier qui trempe dans l'eau *MN*, s'appelle *tuyau d'aſpiration*; le ſecond ſe nomme *corps de pompe*. A l'endroit de la jonction de ces deux tuyaux, on place ordinairement la ſoupape *E* qui s'ouvre de bas en haut. Je dis *ordinairement*, car cette ſoupape ſe met quelquefois plus bas; cela eſt indifférent pour le moment. Dans le corps de pompe, monte & deſcend alternativement un piſton dont la tige *Z* eſt mue par un levier, ou de toute autre manière qu'on voudra. La tête de ce piſton eſt percée dans la direction de ſon axe, d'un trou *t* recouvert par-deſſus, d'une ſoupape *F* qui s'ouvre de bas en haut. Il parcourt dans ſon jeu un certain eſpace, dont je ſuppoſe que *IT* eſt la hauteur, c'eſt-à-dire que quand le piſton eſt baiſſé, ſa baſe inférieure eſt dans le plan horiſontal *IH*; & quand il eſt hauſſé, cette même baſe eſt dans le plan horiſontal *TS*. Fig. 36.

123. Il eſt aiſé de concevoir l'effet de cette machine. Suppoſons qu'au premier inſtant, la baſe du piſton ſoit en *IH*, & que l'air contenu dans la pompe ſoit le même que l'air extérieur. Les deux ſoupapes *E* & *F* ſont fermées. Maintenant qu'on élève le piſton en *TS* : la ſoupape *F* demeure fermée par ſon poids & par la preſſion de l'atmoſphère qui agit par-deſſus; l'air contenu d'abord dans l'eſpace *ACIHBK* ſe dilate par ſon reſſort, force la ſoupape *E* à s'ouvrir, & ſe répand dans l'eſpace *ACTSBK*; en même temps la preſſion de l'atmoſphère ſur la ſurface *MN* du

réservoir pousse l'eau & la force de monter d'une certaine quantité *Aa* dans le tuyau d'aspiration où cette eau trouve un air plus dilaté, & par conséquent moins résistant que l'air extérieur. Qu'on abaisse le piston, la soupape *F* s'ouvre par la compression de l'air contenu dans la Pompe, entre la surface de l'eau & le bas du piston; la soupape *E* se ferme par son poids & par la compression de l'air supérieur; & l'air contenu dans l'espace *CIHB* acquiert la même densité que l'air extérieur. Élevant de nouveau le piston, la soupape *F* se ferme, l'air déja raréfié & contenu dans l'espace *aCBk* se dilate & force la soupape *E* à s'ouvrir; ensorte que cet air & celui qui restoit dans l'espace *CIHB*, se répandent maintenant dans l'espace *aCTSBk*. Par conséquent l'eau doit monter encore d'une certaine quantité *aa'* dans le tuyau d'aspiration, en vertu de la pression de l'atmosphère sur la surface du réservoir. En continuant ainsi à faire jouer le piston, l'eau continuera de monter; elle parviendra enfin à toucher le piston; elle passera par le trou *t*, & s'élevera au-dessus du piston. Alors il n'y aura plus d'air dans la pompe au-dessous du piston qui foulera & refoulera l'eau; les mouvemens des soupapes seront les mêmes qu'auparavant, & l'eau ira sortir par un dégorgeoir *O*.

124. On doit remarquer qu'en supposant même qu'on pût parvenir à vuider parfaitement d'air l'intérieur de la Pompe, la hauteur *LM* du bas *IH* du piston au-dessus de la surface *MN* du réservoir ne pourroit être tout au plus que de 32 pieds, autre-

ment (75) l'eau ne pourroit pas atteindre *IH*, ni à plus forte raiſon s'élever au-deſſus. Mais dans la pratique on fait *LM* moindre que 32 pieds, parce qu'il n'eſt jamais poſſible d'évacuer entièrement l'air, & que d'ailleurs le poids de la ſoupape inférieure *E* eſt un obſtacle qui s'oppoſe à l'expulſion de l'air intérieur, ou à l'aſcenſion de l'eau, & qui ne peut être vaincu que par la preſſion de l'atmoſphère.

Du reſte je ſuppoſe toujours que la preſſion de l'atmoſphère peut faire équilibre à une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, ou que le Baromètre, dans l'endroit où la Pompe eſt placée, ſe tient à la hauteur de près de 28 pouces; mais ſi le Baromètre ſe tenoit plus ou moins haut, il faudroit rectifier la hauteur de la colonne d'eau propoſée, conformément au principe de l'article 46, & mettre ſa valeur exacte par-tout où j'ai mis 32 pieds.

125. La machine étant ſuppoſée bien conſtruite, l'évacuation plus ou moins complette de l'air intérieur dépend de la poſition plus ou moins avantageuſe de la ſoupape *E*. Or l'uſage eſt de placer cette ſoupape, ou en *AK* un peu au-deſſous du niveau *MN* du réſervoir, ou plus ordinairement à la jonction du tuyau d'aſpiration avec le corps de pompe, comme la Figure 36 le repréſente. Voyons quelle eſt la meilleure poſition. L'examen de ces deux cas fera connoître ce qu'on doit penſer des poſitions intermédiaires.

126. Je ſuppoſe d'abord que la ſoupape *E* ſoit placée en *AK*; & pour plus de ſimplicité, je néglige ſon poids.

Dans les premiers instans, lorsqu'on élève le piston de I en T, l'eau du réservoir, poussée par la pression de l'atmosphère, monte facilement dans le tuyau d'aspiration; mais si la hauteur LM, quoiqu'au-dessous de 32 pieds, est un peu considérable, il pourra arriver que l'eau étant parvenue à une certaine hauteur VA dans le tuyau d'aspiration, & le piston à sa plus grande hauteur TS, il pourra se faire, dis-je, que la force élastique de l'air contenu dans l'espace $VCTSBP$, jointe au poids de la colonne d'eau VK, contre-balance la pression de l'atmosphère. Alors l'eau s'arrêtera, quoique l'on continue de faire jouer le piston. En effet, lorsque le piston est en IH, l'air contenu dans l'espace $VCIHBP$ est le même que l'air extérieur; & quand on elève le piston en TS, cet air se répand dans l'espace $VCTSBP$. Ainsi en nommant h la hauteur d'une colonne d'eau équivalente à la pression de l'atmosphère, ou ce qui revient au même (79), à la force élastique de l'air naturel, on voit (8;), que la force élastique de l'air répandu dans l'espace $VCTSBP$ est égale au poids d'une colonne d'eau dont la hauteur est $h \times \frac{VCIHBP}{VCTSBP}$.

Ajoutant à cette hauteur, la hauteur AV de l'eau contenue dans le tuyau d'aspiration, la somme doit être égale à h, pour que l'eau s'arrête en VP. L'équation de cet équilibre est donc

$$h = AV + h \times \frac{VCIHBP}{VCTSBP}.$$

Soient $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le rayon du corps de pompe} \ldots\ldots = R \\ \text{Celui du tuyau d'aspiration} \ldots\ldots\ldots = r \\ \text{Le rapport de la circonférence au} \ldots \\ \quad \text{diamétre} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \pi \\ AC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a \\ CI \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = n \\ \text{Le jeu } IT \text{ du piston} \ldots\ldots\ldots\ldots = p \\ AV \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = x \end{array} \right.$

Il est clair que le cylindre $VB = \pi r^2 (a - x)$; le cylindre $CH = \pi R^2 n$; le cylindre $CS = \pi R^2 (p + n)$; & que par conséquent le solide $VCIHBP = \pi r^2 (a - x) + \pi R^2 n$; le solide $VCTSBP = \pi r^2 (a - x) + \pi R^2 (p + n)$. Donc l'équation précédente devient

$$h = x + \frac{h(r^2(a - x) + R^2 n)}{r^2(a - x) + R^2(p + n)},$$

d'où l'on tire, (après avoir fait $\frac{R^2}{r^2} = k$),

$$x = \frac{a + k(p + n) \pm \sqrt{[(a + k(p + n))^2 - 4khp]}}{2}.$$

Or toutes les fois que la valeur de x sera réelle & moindre que a, l'eau s'arrêtera réellement dans le tuyau d'aspiration, comme on l'a supposé dans le calcul. Elle ne continuera donc de monter que quand il sera absurde de supposer qu'elle s'arrête, c'est-à-dire que quand les racines de notre équation seront imaginaires. Or pour que ces racines soient imaginaires, il faut que l'on ait $4khp > (a + k(p + n))^2$. Ainsi lorsque cette condition aura lieu, l'eau montera, sinon elle ne montera point. Appliquons cela à des exemples.

EXEMPLE I.

Soient $h = 32$ pieds ; $k = 1$, ou le raïon du tuyau d'aſpiration égal à celui du corps de pompe; $a = 20$ pieds ; $n = 2$ pieds; $p = 2$ pieds. On aura $4 \times 32 \times 2 < (20 + 4)^2$. Donc l'eau s'arrêtera, & la Pompe doit être rejettée.

EXEMPLE II.

Soient $h = 32$ pieds ; $k = 4$; $a = 25$ pieds ; $n = 0$; $p = 2$ pieds. On aura $4 \times 32 \times 4 \times 2 < (25 + 8)^2$. Donc l'eau s'arrêtera encore, & la pompe doit être rejettée. Mais ſi tout étant d'ailleurs le même, on fait $k = 6$, l'eau montera & la Pompe pourra être admiſe.

127. On s'aſſurera, par la même méthode, ſi en ſuppoſant l'eau arrivée dans le corps de pompe, elle ne s'y arrêtera pas entre les points *C* & *I*. Il ne faudra, pour adapter la formule précédente à ce cas, qu'y faire $k = 1$.

128. Tous ces calculs montrent unanimement qu'en plaçant ainſi la ſoupape *E* en *AK*, la hauteur du piſton au-deſſus de l'eau du réſervoir, devra toujours être fort au-deſſous de 32 pieds, à moins qu'on ne donne un très-grand jeu au piſton, ou qu'on ne faſſe le diamètre du tuyau d'aſpiration fort petit par rapport à celui du corps de pompe. Ces deux moyens ont leurs inconvéniens. Le dernier, ſur-tout, peut diminuer le produit de la Pompe, en faiſant conſumer à l'agent une partie de ſa vîteſſe en pure perte. Car la vîteſſe de l'agent doit être tellement réglée,

que quand la machine joue bien, il monte précisément autant d'eau par le tuyau d'aspiration, que le piston en soulève en montant dans le corps de pompe; de manière qu'il ne reste jamais de vuide entre la tête du piston & l'eau qui la suit.

129. Supposons en second lieu que la soupape *E* soit placée à la jonction des deux tuyaux, comme la Figure 36 le représente. Il paroît au premier coup d'œil que cette seconde disposition a l'avantage de procurer une évacuation presque complette de l'air intérieur. Car en faisant descendre le piston le plus près qu'il est possible de *CB*, il ne restera de l'air que dans le petit espace *CIHB* & dans la petite cavité *t*. La hauteur *LM* peut donc alors être de près de 32 pieds. Mais cela suppose que les soupapes joignent bien contre les parois des trous qu'elles doivent boucher, & qu'elles ne donnent, quand il le faut, aucune issue ni à l'eau, ni à l'air. Or cette perfection ne se rencontre jamais dans la pratique. D'ailleurs quand même les soupapes seroient d'abord parfaitement fidèles; si la machine demeure quelque temps dans l'inaction, les cuirs se séchent & les soupapes se corrompent. Cet inconvénient qui affecte la soupape *E* quand elle est placée en *CB*, n'a pas lieu lorsqu'elle est en *AK* où elle demeure toujours plongée dans l'eau. Cependant, tout considéré, il vaut mieux mettre la soupape *E* en *CB* qu'en *AK*. Mais il faut toujours tenir *LM* sensiblement au-dessous de 32 pieds.

130. Après avoir ainsi pris toutes les précautions convenables pour que l'eau s'élève dans la Pompe,

passe par le trou t, & aille se dégorger en O, cherchons l'expression de la force qu'il faut appliquer au piston, lorsqu'il monte.

Supposons que la machine étant bien en train, & l'eau étant parvenue à sa plus grande hauteur QD dans le corps de pompe, le piston soit placé, au premier instant, en IH qui est le terme le plus bas de sa course. Il est clair qu'en ce moment il soutient, 1°. le poids de la colonne d'eau $IHDQ$. 2°. En considérant que la densité de l'atmosphère peut être censée la même sur toute la hauteur qui répond à la Pompe, on voit (70) que la pression de l'air sur QD peut faire équilibre à la pression de l'air sur MN, qui force l'eau à monter dans la Pompe; car alors ces deux pressions sont évidemment proportionnelles aux bases sur lesquelles elles s'exercent. De plus on voit que la pression de l'air sur une base quelconque est égale au poids d'une colonne d'eau, de même base, & de 32 pieds de hauteur. Soient les verticales égales XY, YM, chacune de 32 pieds, les hauteurs des deux colonnes d'eau, équivalentes aux pressions de l'atmosphère sur QD & sur MN. Maintenant, il est clair qu'en vertu de la pression de l'atmosphère sur QD, le piston supporte une force exprimée par $IH \times XY$; & qu'en vertu de la pression de l'atmosphère sur MN, la colonne d'eau $ACIHBK$ presse de bas en haut la tête IH du piston avec une force exprimée par $IH \times MY$, tandis que cette même force est diminuée, par la pesanteur de la colonne $ACIHBK$, de la quantité $IH \times LM$; ce qui donne

$IH \times LY$ pour la force qui pousse la tête IH du piston de bas en haut. Retranchant $IH \times LY$ de $IH \times XY$, la force restante $IH \times LM$ est celle que supporte la tête du piston, & qu'il faut joindre au poids de la colonne $IHDQ$. Ainsi en tout, le piston est chargé du poids d'une colonne d'eau qui a IH pour base, & pour hauteur la distance verticale de la base QD au niveau de l'eau du réservoir. Il en est de même pour toute autre position du piston. Il porte toujours (quelles que soient la figure & les dimensions du corps de pompe & du tuyau d'aspiration) le poids d'une colonne d'eau, de même base que lui, & qui a pour hauteur la distance verticale du point où il faut élever l'eau, au niveau de celle du réservoir. Ajoutant à ce poids celui du piston même, la somme sera la force qu'on doit appliquer au piston dans le simple état d'équilibre; mais pour mettre la machine en mouvement, il faut augmenter cette force d'une certaine quantité, tant pour produire le mouvement que pour surmonter la résistance du frottement & des autres obstacles qui peuvent naître des imperfections de la machine. Il est inutile de dire que le piston descend par sa pesanteur, & que par conséquent la force motrice n'a pas d'effort à soutenir, pendant cette partie du temps.

Lorsqu'on voudra appliquer cette théorie à la pratique, on doit sçavoir que le pied cube d'eau douce pese environ 70 livres, comme nous l'avons déja remarqué; que *le pied cylindrique* d'eau (c'est-à-dire, un cylindre qui a 1 pied de hauteur & 1 pied de

diamètre) peſe environ 55 livres, &c. Ordinairement on augmente la force motrice, calculée pour l'état d'équilibre, du tiers de ſa valeur, pour paſſer à l'état de mouvement; mais cette détermination n'a rien de fixe ; elle dépend de la nature du frottement, & de la vîteſſe qu'on veut imprimer au fardeau enlevé.

131. Suppoſons que la pompe ſoit parvenue à un mouvement uniforme & permanent ; ce qui eſt l'état qu'on cherche à lui procurer. Il eſt aiſé de trouver ſon produit, quand on connoît la vîteſſe avec laquelle le piſton eſt mu. Soient e l'eſpace qu'il parcourt en une ſeconde en montant ; R le raïon de ſa baſe ou du corps de pompe ; π le rapport de la circonférence au diamétre : le piſton ſoulèvera, & par conſéquent la Pompe produira, en une ſeconde, un nombre de pouces cubes exprimé par $\pi R^2 e$.

132. L'application de ces principes généraux à des exemples particuliers n'aura jamais de difficulté. Mais on doit faire une attention expreſſe à la réflexion que j'ai propoſée à la fin de l'article 128. Dans le cas où la hauteur YL eſt fort petite, & où par conſéquent l'eau monte avec peu de vîteſſe dans le corps de pompe, il faut tellement modérer la vîteſſe & le jeu du piſton, qu'il ne ſe forme pas de vuide entre ſa tête & l'eau qui le ſuit ; autrement il y auroit du temps perdu dans la manœuvre de la Pompe. On pèche quelquefois contre cette règle, & on eſt enſuite tout étonné qu'une Pompe mue très-vîte, ne produiſe pas ſenſiblement plus d'eau que quand elle marche avec lenteur. Il eſt donc à propos de com-

biner les dimensions de la Pompe avec la vîtesse & le jeu du piston, de manière que l'agent employe sans cesse utilement toute la force qu'on est en droit d'attendre de lui.

133. La Figure 37 représente une pompe *foulante*. On voit que le corps de pompe *ACBK* trempe dans l'eau *MN*; le piston entre par en bas & soulève ou *foule* l'eau; sa tige *Z* est solidement attachée à la traverse *bc* du chassis mobile *abcd* qu'on fait monter & descendre alternativement par le moyen d'un levier, ou de toute autre manière qu'on voudra; sa tête est percée d'un trou recouvert par une soupape *F* qui s'ouvre de bas en haut. En *VP*, un peu audessous de la surface de l'eau, est un diaphragme percé d'un trou recouvert par une soupape *E* qui s'ouvre de bas en haut. Le corps de pompe s'unit en *CB* avec le tuyau montant *CBOQ* qui porte l'eau à l'endroit où l'on veut l'élever. Fig. 37.

134. Pour expliquer le jeu de cette Pompe, supposons qu'au premier instant le piston soit placé au point le plus bas de sa course. Alors l'eau du réservoir tend, par sa propre pesanteur, à soulever les deux soupapes *F*, *E* & à monter dans le corps de pompe jusqu'au niveau *MN*. Quand elle y est arrivée, ou que du moins la partie du corps de pompe, comprise entre les deux soupapes, est remplie d'eau, les soupapes se ferment par le poids qui leur reste dans le fluide. Maintenant, qu'on élève le piston; la soupape inférieure *F* demeure fermée, la soupape *E* s'ouvre, & l'eau contenue dans le corps de pompe,

entre les deux ſoupapes, eſt forcée de s'élever au-deſſus du niveau *MN*. Abaiſſant le piſton, la ſoupape *E* ſe ferme & empêche l'eau qui eſt au-deſſus de deſcendre; la ſoupape *F* s'ouvre, & la partie du corps de pompe, compriſe entre les deux ſoupapes, ſe remplit d'eau. Elevant une ſeconde fois le piſton, la ſoupape *F* ſe ferme, la ſoupape *E* s'ouvre, & l'eau continue de monter dans le tuyau *CBOQ*. Ainſi de ſuite. On voit que par le jeu réitéré du piſton, l'eau s'élève de plus en plus dans le tuyau *CBOQ*, & finit par arriver à la hauteur deſirée.

135. Il eſt évident que par le moyen de cette Pompe on peut élever l'eau à telle hauteur qu'on voudra, pourvu que l'on ait une force motrice ſuffiſante. Cette force ſe calcule ici, comme pour la Pompe aſpirante. Dans le ſimple état d'équilibre, elle ſoutient toujours en montant (outre le poids du piſton & celui du chaſſis *a b c d*) le poids d'une colonne d'eau qui a pour baſe le cercle de la tête du piſton, & pour hauteur la diſtance verticale du point où l'eau eſt élevée, à un plan horiſontal qui raſe la ſurface de l'eau du réſervoir. Quand le piſton deſcend, l'agent n'a pas à ſoutenir le poids dont on vient de parler; il n'a, pendant ce temps, d'autre fonction que d'accélérer, s'il le faut, la chûte du piſton. Le produit de la Pompe ſe détermine, comme ci-deſſus, lorſque la vîteſſe du piſton eſt donnée.

Fig. 38. 136. La Pompe *aſpirante & foulante* eſt compoſée d'un tuyau d'aſpiration *ACBK* qui trempe dans l'eau

l'eau *MN*, d'un corps de pompe *CTSB* & d'un tuyau montant *HLOQ*. En *CB* & *VP* ſont deux ſoupapes *E*, *F* qui s'ouvrent de bas en haut. Le piſton eſt maſſif & ſa tête n'eſt pas percée, comme ci-devant. Il joue dans le corps de pompe, ſans deſcendre jamais plus bas que *HY*, pour ne pas boucher l'entrée *HL* du tuyau montant. On voit qu'en faiſant monter & deſcendre alternativement le piſton l'eau monte d'abord dans le tuyau d'aſpiration & dans le corps de pompe, précisément de la même manière que dans la Pompe aſpirante ordinaire. Les mouvemens alternatifs des deux ſoupapes *E*, *F* ſont abſolument les mêmes dans les deux cas. L'eau arrive, après quelques coups de piſton, dans l'eſpace vuide que ce même piſton en s'élevant occaſionne dans le corps de pompe. Enſuite le piſton en deſcendant la foule & la fait paſſer dans le tuyau montant *HLOQ*. Elevant le piſton, il aſpire de nouvelle eau qu'il foule en deſcendant. Ainſi de ſuite.

137. On trouve ſans peine la valeur de la force motrice dans cette Pompe, toujours pour le ſimple état d'équilibre. Car 1°. en ſuppoſant que par l'aſpiration l'eau s'élève en *ts*, il eſt évident qu'alors la ſoupape *F* étant fermée, la puiſſance appliquée au piſton ſoutient, outre le poids de ce même piſton, une partie du poids de l'atmoſphère, égale au poids d'une colonne d'eau, qui a pour baſe le cercle de la tête du piſton, & pour hauteur la diſtance verticale de *ts* au niveau *MN* de l'eau du réſervoir. 2°. Pendant le refoulement, la ſoupape *E* étant fer-

mée, le piſton ſoutient le poids d'une colonne d'eau qui a même baſe que lui, & pour hauteur la diſtance verticale de cette baſe au plan horiſontal qui paſſe par le point *O* où l'eau eſt élevée. On voit que le piſton en deſcendant, aide de ſon poids la puiſſance.

138. Quelquefois on diſpoſe la Pompe aſpirante & foulante, de manière que le piſton, au lieu d'aſpirer en montant & de fouler en deſcendant, comme dans la Figure 38, aſpire en deſcendant, & foule en Fig. 39. montant, comme dans la Figure 39. Mais la force motrice ſe calcule de même dans les deux cas, en ayant égard convenablement au poids du piſton.

139. Telles ſont les trois eſpèces primordiales de Pompes. Toutes celles qu'on pourra conſtruire ou imaginer, n'en ſeront jamais que des combinaiſons plus ou moins ſimples. On ne peut donc eſpérer de perfectionner réellement ces machines, qu'en diminuant le plus qu'il eſt poſſible le frottement, en employant de bons piſtons, des ſoupapes fidèles, pour bien tenir l'eau & pour empêcher, lorſqu'il le faut, toute entrée à l'air extérieur. Il reſte encore en ce genre un vaſte champ à l'induſtrie des Artiſtes. Les meilleures ſoupapes connues, ſont celles à *coquille* & les *clapets*. Dans la Fig. 37, *E* & *F* ſont des ſoupapes à coquille; dans les Figures 36, 38, 39, *E* & *F* ſont des clapets. Les détails de la conſtruction & du choix des matières propres à former les pièces d'une Pompe, ſont étrangers à mon objet. On peut conſulter ſur cela *l'Architecture Hydraulique* de M. Belidor, en ſe tenant en garde contre la théorie

qu'il donne du méchanisme des Pompes ; car elle est extrêmement fautive.

140. On voit assez que dans les trois Pompes proposées, le jet d'eau formé au dégorgeoir n'est pas continu, mais qu'il est intermittent ; car il y a environ la moitié du temps, qui est employée à abaisser ou à élever le piston pour prendre de nouvelle eau ; & pendant cette partie du temps, il ne sort point d'eau, ou du moins il n'en sort que très-peu par le dégorgeoir. Depuis plusieurs années on garnit ordinairement le tuyau montant, comme on le voit dans la Pompe foulante de la Fig. 40, d'une espèce de tambour creux, *KR*, fermé au-dehors de tous côtés, mais qui communique avec le tuyau interrompu en *G*, *H*. Ce tambour qu'on appelle *réservoir d'air*, contient d'abord de l'air qui a même densité que celui du dehors. Quand on élève le piston, l'eau qui monte par la branche *CBDQ* se répand en partie dans le réservoir *KR* ; elle condense l'air qui y est contenu ; elle lui coupe la communication avec l'air extérieur, & le réduit à n'occuper que l'espace *kryx*. Lorsqu'ensuite on abaisse le piston, l'air ainsi condensé se dilate par son ressort, force l'eau à descendre de *kr* en *KR*, & à s'élever par conséquent dans la branche *GHQD*. En continuant le même jeu, on voit qu'il monte sans cesse de l'eau dans cette branche, & que le jet à l'endroit du dégorgeoir doit être continu, du moins sensiblement. Fig. 40.

141. Il y a des faiseurs de Pompes qui s'imaginent que le réservoir d'air augmente de moitié l'effet

de la machine; car, diſent-ils, puiſqu'alors le jet eſt continu, la Pompe doit donner deux fois autant d'eau qu'elle en donneroit s'il n'y avoit pas de réſervoir d'air, & que le jet fût intermittent. Mais ils ne font pas attention que le produit de la Pompe n'eſt jamais que la quantité d'eau que le piſton ſoulève en montant; & que la puiſſance motrice (la vîteſſe du piſton demeurant toujours la même) employe toujours le même effort, ſoit qu'elle faſſe monter directement cette eau juſqu'au dégorgeoir, ſoit qu'une partie de cette eau ſe répande dans le réſervoir d'air, d'où elle eſt ſoulevée enſuite par le reſſort de l'air. Car dans le ſecond cas il faut tendre le reſſort de l'air du réſervoir *K R*; & cet effort joint à celui qui fait monter actuellement une partie de l'eau dans la branche *G H Q D*, épuiſe la force entière; ce qui revient au premier cas. Si donc le jet eſt continu quand il y a un réſervoir d'air, l'eau ſort avec une vîteſſe deux fois moindre qu'elle ne ſortiroit s'il n'y avoit pas de pareil réſervoir, & que le jet fût intermittent; & le produit de la Pompe eſt toujours le même. Le réſervoir d'air eſt donc très-inutile dans les Pompes qui ont ſimplement pour objet d'élever l'eau; mais il eſt avantageux dans les Pompes à incendies, parce qu'un jet d'eau continu éteint plus facilement le feu qu'un jet qui va par bonds, quoiqu'avec plus de vîteſſe.

142. M. de la Hire le fils avoit propoſé dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1716, une Pompe qui ſans le ſecours d'aucun réſervoir d'air de-

voit produire un jet continu. Cette Pompe a été imitée dans ces derniers temps, par les sieurs Thillaye & Quentin, Maîtres Pompiers à Rouen, qui ont présenté chacun à l'Académie Royale des Sciences, une Pompe de leur façon, construite sur le principe de M. de la Hire. Voici celle du sieur Quentin. *K* & *H* sont deux tuyaux d'aspiration ; *CF* est un corps de Pompe; *Nu*, *fgh* sont deux tuyaux montans qui se réunissent en un seul à une certaine hauteur. On voit que le tuyau d'aspiration *K*, le corps de Pompe *CF* & le tuyau montant *fgh* sont disposés comme dans la Pompe aspirante & foulante de la Figure 38. Les quatre soupapes à coquille, *S*, *s*, *S'*, *s'* s'ouvrent & se ferment alternativement deux à deux. La tige *Z* du piston traverse un plateau ou collet *CB* de cuivre, & doit s'y mouvoir de manière que toute entrée dans le corps de pompe *CF* soit interdite à l'air extérieur. En *yz* & *mn* sont deux ouvertures par lesquelles le corps de pompe communique avec les deux tuyaux montans. Le piston descend jusqu'en *F* & monte jusqu'en *m*. Fig. 41.

L'effet de cette Pompe est facile à comprendre. Supposons que le piston, au premier instant, soit placé au point le plus bas de sa course. Lorsqu'on vient à l'élever, il fait un vuide ; l'air qui est au-dessous, en se dilatant soulève la soupape *S*, & la pression de l'atmosphère fait monter l'eau; en même temps l'air contenu dans le corps de pompe, entre le plateau *CB* & la tête supérieure du piston, soulève la soupape *s* & s'échappe. Abaissant le piston,

les deux ſoupapes *S* & *s* ſe ferment, & les deux autres ſoupapes *S'* & *s'* s'ouvrent, l'une par le refoulement de l'eau que le piſton en deſcendant fait entrer par l'ouverture *yz* dans le tuyau *fgh*, l'autre par la dilatation de l'air contenu dans le tuyau *H*, dans l'eſpace *Nm*, & dans l'eſpace compris entre la tête du piſton & le plateau *CB*. Ainſi de ſuite. Quand le corps de pompe eſt entièrement rempli d'eau, le piſton aſpire & foule ſans ceſſe, & le jet doit être néceſſairement continu, du moins à très-peu près. Le ſieur Quentin, dans la vûe ſans doute de rendre la continuité du jet plus parfaite, a garni le tuyau montant *fgh* d'un réſervoir d'air *AE* que M. de la Hire n'avoit pas employé. Les Commiſſaires nommés par l'Académie ont trouvé que cette Pompe produiſoit très-bien ſon effet.

143. On employe, pour mouvoir les Pompes, toutes ſortes d'agens, comme des hommes, des chevaux, des courans d'eau, &c. Les petites machines de ce genre, telles que les Pompes à puits ou à incendies, ſont ordinairement mues à bras d'hommes. Lorſqu'il faut élever une quantité conſidérable d'eau, on multiplie à proportion la force motrice; & pour qu'elle exerce continuellement le même effort, du moins à peu près, ſans reſter jamais oiſive, on établit pluſieurs équipages de Pompes; de manière que quand une partie des piſtons deſcend, l'autre monte.

Fig. 42. Dans la Figure 42, *MNB* eſt une manivelle verticale, mobile autour de ſon axe, qui au moyen des deux chaînes *V* & *T* fait tourner autour de leurs axes

C, *E* les quarts de cercle verticaux *ACO*, *GEF* auxquels ſont appliquées les chaînes *S*, *H* de deux piſtons de Pompes. La manivelle eſt mue par la puiſſance *P*. On voit que les chaînes *S*, *H* en montant & en deſcendant, demeurent toujours verticales.

La Figure 43 repréſente une manivelle *MNB* horiſontale, deſtinée à mouvoir les piſtons de deux Pompes. Les chaînes *S*, *H* vont paſſer ſur deux poulies *A*, *O* qui maintiennent les piſtons dans la direction verticale. La manivelle eſt mue par une roue qu'un courant d'eau fait tourner. Fig. 43.

144. Les tuyaux des Pompes ſouffrent quelquefois des efforts très-conſidérables. Lorſque ces tuyaux ſeront faits avec des matières flexibles, comme par exemple, avec du plomb, du cuivre, du fer même, & qu'on aura évalué en colonnes d'eau de hauteurs données les preſſions qu'ils ſupportent, on trouvera les épaiſſeurs qu'ils doivent avoir pour ne pas crever, au moyen de la théorie que nous avons donnée à la fin du Chap. I.

De la Machine à feu.

145. La Pompe ou Machine à feu eſt une des plus admirables inventions de l'eſprit humain. Tout ſon jeu conſiſte dans l'action alternative de la vapeur de l'eau & de la preſſion de l'atmoſphère, combinée avec les réſiſtances qu'il faut vaincre, comme on le verra dans un moment. Il paroît qu'on en doit la première idée à Papin, Médecin François, Profeſſeur de Phyſique expérimentale à Marbourg,

& Membre de la Société Royale de Londres. Car outre qu'il a fait connoître le premier, par la fameuse expérience de sa *Marmite*, la force de la vapeur de l'eau, il propose dans un petit Ouvrage imprimé en 1695 la construction d'une nouvelle Pompe dont les pistons seroient mis en mouvement par la vapeur de l'eau bouillante, alternativement dilatée & condensée. Mais il falloit réaliser cette idée & la mettre en pratique d'une manière simple & commode. Les Anglois sont les premiers qui y soient parvenus au commencement de ce siècle, & qui ayent construit des machines à feu, telles qu'on les employe aujourd'hui. Il y en a plusieurs en Angleterre, en Ecosse, en France, en Allemagne, &c. M. le Chevalier du Buat, Ingénieur ordinaire du Roi, a eu la bonté de m'envoyer une description claire & exacte de celle qui est à *Fresne*, Village proche Condé, & qui sert à épuiser d'eau les mines de charbon de ce pays. Toutes ces machines se ressemblent quant au fond; elles ne peuvent avoir de différences que dans quelques pièces accessoires. Tâchons d'en bien faire entendre le méchanisme général.

146. Il paroît que l'eau est composée de parties dures & incompressibles, du moins sensiblement. Car M. Newton & plusieurs autres Physiciens ont tenté vainement de réduire une quantité déterminée de ce fluide en un moindre volume, par la voie de la compression. Mais ce même fluide exposé à l'action du feu se dilate ou se répand dans un plus grand espace, parce que le feu qui s'insinue entre ses par-

ties les ſoulève & les écarte les unes des autres en toutes ſortes de ſens. De plus le feu fait ſortir du corps de l'eau, en forme de vapeur, un fluide très-léger, très-ſubtil, très-élaſtique, capable de faire équilibre à des poids conſidérables. En effet, quand on fait bouillir de l'eau dans une marmite ouverte par en haut, la vapeur dont il s'agit ſoulève la colonne ſupérieure d'air, & s'élève à une hauteur ſenſible. Si la marmite eſt fermée par un couvercle qui y ſoit attaché ſolidement, enſorte que la vapeur n'ait pas la liberté de s'étendre, elle agit avec une force qui peut devenir énorme; car on a fait crever, par ce moyen, des tronçons de canons très-épais, dont on avoit fermé à vis les deux bouts avec de forts plateaux de fer. On ſent que ces ſortes d'expériences ſont très-dangereuſes à faire. Nous verrons ci-deſſous que dans la machine à feu, la force de la vapeur de l'eau eſt à la preſſion de l'atmoſphère, comme 39 eſt à 32 environ.

147. Cette vapeur n'eſt pas de l'air qui ſe dégage de l'eau, comme quelques perſonnes pourroient le penſer. Voici une expérience du Docteur Deſaguliers, qui ne laiſſe là-deſſus aucun doute. Mettez dans un grand vaiſſeau une certaine quantité d'eau que vous aurez ſoin d'abord de bien purger d'air, ſoit en la faiſant bouillir, ſoit par le moyen de la machine pneumatique. Suſpendez par un cordon, dans le vaiſſeau, une cloche de verre aſſez peſante pour s'enfoncer totalement dans l'eau. Faites enſorte qu'elle ſoit remplie parfaitement d'eau quand elle eſt droite,

& qu'il n'y reste point de bulle d'air par en haut. Ensuite vous ferez bouillir l'eau, & vous verrez alors la cloche se vuider par degrés de son eau qui est chassée au bas par l'expansion de la vapeur qui se forme à sa surface. Cette vapeur qui ressemble à de l'air n'en est pas cependant; car si vous élevez la cloche de manière que sa base seule demeure dans l'eau, la vapeur venant à se condenser par le froid de l'air qui environne la cloche, l'eau s'y élèvera sans qu'il y reste une seule bulle d'air; ce qui prouve que la vapeur qui avoit chassé l'eau n'étoit pas de l'air. Il paroît que la vapeur est un fluide particulier, mêlé dans l'eau, ou si l'on veut, la partie la plus subtile de l'eau, que le feu met en action, & qui perd subitement sa vertu expansive, jusqu'à n'occuper qu'un volume presqu'infiniment petit, quand on la refroidit d'une manière quelconque.

148. Le même Docteur Desaguliers a trouvé par un grand nombre d'observations sur les Machines à feu, que la vapeur, dans l'état où elle peut faire équilibre à la pression de l'atmosphère, est environ 14000 fois plus rare que l'eau ordinaire, & 16 ou 17 fois plus rare que l'air. L'expérience suivante, très-connue des Physiciens, suffit pour montrer en gros l'extrême dilatabilité du fluide en question. Qu'on prenne un mince tuyau de Thermomètre, garni de sa boule, & ouvert par l'autre bout; qu'on y introduise une goutte d'eau dont le diamètre soit à celui de la boule comme 1 est à 25; ensuite après avoir vivement échauffé la boule en la tournant sur

un réchaud ardent, qu'on plonge le bout du tube dans de l'eau froide contenue dans un vaſe; on verra cette eau monter dans la boule, & en remplir preſqu'entièrement la capacité. Il eſt clair que cet effet s'opère, parce qu'en échauffant d'abord la boule, la goutte d'eau ſe réduit en vapeur & chaſſe l'air intérieur ; qu'enſuite la vapeur étant condenſée par l'immerſion du tube dans l'eau froide, il ſe fait un vuide dans lequel la preſſion de l'atmoſphère force l'eau froide de monter. L'eſpace que cette eau occupe alors eſt à très-peu de choſe près la meſure de celui qu'occupoit la vapeur. Je dis *à peu de choſe près*, parce qu'il peut reſter un peu d'air dans l'inſtrument. Si l'eau qui eſt montée dans la boule ſuppoſée infinie par rapport au tube, en occupoit entièrement la capacité, le volume de la goutte réduite en vapeur ſeroit à ſon volume dans ſon premier état, comme 15625 — 1 ou 15624 eſt à 1 ; car on ſçait que deux ſphères ſont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres; & on voit que de l'eſpace occupé par la vapeur, il faut retrancher l'eſpace occupé par la goutte dans ſon état primitif, pour avoir le rapport des deux volumes dont on vient de parler.

149. Il ſuit de ce qui précéde, que ſi au-deſſous du cylindre creux *ACDE* garni d'un piſton mobile *P* on fait bouillir de l'eau dans une marmite ou chaudière *AMNE*, la vapeur de cette eau paſſant par l'ouverture *mn* forcera le piſton de monter, en ſurmontant la preſſion de l'atmoſphère qui agit Fig. 44.

par-deſſus. Ce mouvement ſera plus vif, s'il eſt aidé par un poids *B* appliqué à l'extrémité *H* du levier *HO* dont l'appui eſt en *T*. Enſuite le piſton étant arrivé au point le plus haut où l'on veut qu'il monte, ſi l'on condenſe la vapeur de l'eau en la refroidiſſant par une injection d'eau froide qu'on introduira dans le cylindre, au moyen d'un robinet *R* ou autrement, il ſe fera un vuide dans l'eſpace que la vapeur occupoit. Alors la preſſion de l'atmoſpère que je ſuppoſe plus grande que le poids *B*, agiſſant ſur la tête ſupérieure du piſton, forcera ce même piſton de deſcendre. Continuant le même jeu, le piſton montera & deſcendra alternativement. C'eſt dans cette double action de la vapeur de l'eau & de la preſſion de l'atmoſphère que conſiſte tout le méchaniſme de la Pompe à feu. Nous verrons bientôt comment ce double mouvement s'exécute d'une manière continue.

150. Le poids *B* qui nous repréſente ici le poids unique auquel on peut toujours réduire tous les poids particuliers qui ſont réellement appliqués au levier ou balancier de la machine; ce poids, dis-je, doit être réglé de manière que le piſton ait la même vîteſſe en montant qu'en deſcendant. Suppoſons donc $OT = a$; $HT = b$; le cercle de la tête du piſton $= c^2$. Nommons de plus H la hauteur d'une colonne d'eau peſante, qui ayant c^2 pour baſe eſt équivalente à l'effort de la vapeur contre la tête du piſton; h la hauteur d'une colonne d'eau de même baſe & équivalente à la preſſion de l'atmoſphère ſur le piſton.

Il eſt clair que le mouvement ſera uniforme, ſi l'on a l'équation

$$(Hc^2 - hc^2)a + Bb = hc^2 a - Bb,$$

& par conſéquent $B = \frac{2hc^2a - Hc^2a}{2b}$.

Par exemple, ſoient $a = b$, $H = 39$, $h = 32$: on aura $B = c^2 \times 12\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire que le poids B ſera égal au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour baſe le cercle de la tête du piſton, & $12\frac{1}{2}$ pieds de hauteur. Si outre $a = b$, on avoit $H = h$ ſimplement, on trouveroit $B = c^2 \times 16$, c'eſt-à-dire que le poids B ſeroit égal au poids d'une colonne d'eau qui auroit même baſe que la tête du piſton & 16 pieds de hauteur.

151. Tout cela étant bien entendu, je paſſe à la deſcription détaillée de la machine.

Elle eſt repréſentée en perſpective dans la Figure 45, qui en fait voir l'enſemble. La Figure 46 en repréſente un profil. La tige X du piſton P & la piéce de bois FG mobile verticalemenr dans le ſens de ſa longueur, ſont appliquées, par le moyen de chaînes, à l'un des bras d'un grand balancier ou levier dont l'autre bras fait mouvoir des pompes ou tels autres poids qu'on voudra. On n'a repréſenté ici ni le balancier, ni les pompes auxquelles il communique le mouvement; il eſt aiſé de ſe peindre ce méchaniſme, & d'ailleurs la Figure 44 peut en donner une idée ſuffiſante. On voit qu'outre la chaudiere, le cylindre, le piſton & le balancier qui ſont les pièces principales de la machine, il y a un grand nombre de

Fig. 45 & 46.

tuyaux, de robinets, de leviers, &c, qui concourent à son jeu. Nous expliquerons successivement leurs usages particuliers. Dans les deux Figures 45 & 46, on a cotté les mêmes pièces par les mêmes lettres ou chiffres; mais on ne s'est pas assujetti à cette loi dans les autres Figures relatives à la machine proposée.

152. Au fond du cylindre *H* est adapté un petit cylindre *K*, nommé ordinairement le *collet*, ouvert par les deux bouts, qui déborde un peu par en haut le fond du cylindre *H*, pour une raison que nous dirons ci-dessous, & qui pénétre par le bout inférieur *Z* le chapiteau *VZT* de la chaudière. Ce tuyau *K* sert à faire passer la vapeur de la chaudière dans le cylindre *H*. Une plaque de cuivre, circulaire & horisontale, nommée *régulateur*, portant une queue ou manche mobile autour d'un axe vertical, s'applique exactement contre la base inférieure du collet *K*; elle en ouvre & ferme alternativement l'entrée, en tournant autour de son axe. Tant que la vapeur agit avec toute sa force contre le piston *P*, il monte, ou du moins il peut demeurer suspendu à une certaine hauteur; mais on le fait descendre, quand il faut, en fermant le régulateur, & en produisant dans le cylindre *H* une injection d'eau froide. Cette eau est amenée par le tuyau *QM3'*, nommé *tuyau d'injection*, garni d'un robinet *R* appellé *robinet d'injection*, lequel en tournant sur son axe ou dans un sens ou dans un autre, arrête ou laisse passer l'eau. Dans le second cas, elle jaillit par l'ajutage *3'* de

bas en haut, & va frapper la base inférieure du piston ; ce qui la fait retomber en pluye, condense la vapeur & donne lieu à la pression de l'atmosphère de faire descendre le piston.

153. Comme le mouvement se perpétue dans la machine par cette action alternative du régulateur & du robinet d'injection, on doit s'attacher à la bien comprendre.

Les Figures 47, 48, 49 qui sont dessinées plus en grand que les Figures 45 & 46, montrent le jeu du régulateur & des pièces qui le conduisent. Fig. 47, 48, 49.

Dans la Figure 47, *aaaa* représente un anneau de fer, horisontal, placé au-dedans du chapiteau de la chaudière, & suspendu à ce même chapiteau par quatre supports ou montans verticaux qui sont désignés par les lettres *a*, *a*, *a*, *a*. Le cercle *bb* représente la base inférieure du *collet*. Le cercle *dd* est le régulateur garni de son manche *mm* qui ne fait qu'un même corps avec lui. Cette pièce est traversée quarrément par un axe ou essieu vertical *e* qui la fait tourner, & qui fait décrire au centre *o* l'arc *co* pour ouvrir, & l'arc *oc* pour fermer l'orifice du collet. *DF* est un ressort destiné à presser le régulateur contre l'orifice du collet.

Dans la Figure 48 qui est un profil élevé sur le diamètre *dd* perpendiculairement à *eo*, *MN* est le profil du chapiteau de la chaudière ; *K* celui du collet ; *dtb* le régulateur ; *AE* l'anneau dont nous avons parlé ; *AN*, *EM* les montans qui le soutiennent ; *ABC* le ressort contre lequel le bouton *t* du

régulateur s'appuie en allant de *A* vers *B* lorſqu'il ſe ferme.

La Figure 49 eſt un autre profil élevé ſur *e o*, perpendiculairement au précédent. *xy* eſt l'eſſieu vertical qui fait mouvoir le régulateur. Le pivot inférieur de cet eſſieu joue dans l'anneau *a a a a* (Fig 47). Le bout *e* du manche du régulateur eſt lié par une clavette *L* à l'axe *xy* qui, dans ſa partie ſupérieure *ex*, eſt bien rond & joue exactement dans un canon *fg* adapté au chapiteau de l'alembic. Enfin le bout ſupérieur *x* de l'eſſieu *xy* reçoit une clef *i* (Fig. 45) par le moyen de laquelle le régulateur eſt mu.

154. Maintenant, voyons comment les mouvemens du régulateur & du robinet d'injection ſont produits.

Fig. 45. Deux poteaux *A*, *A* ſoutiennent un eſſieu horiſontal *BC* qui tourne dans les anneaux d'un étrier *abcd*, lequel eſt traverſé d'un boulon *e*. Autour de ce boulon jouent les anneaux d'une fourche *hfg* dont la queue *h* tire ou pouſſe horiſontalement la clef *i* du régulateur. Dans le même eſſieu *BC* ſont fixées quatre pièces différentes; ſçavoir, une patte à deux griffes *k*, *l* qui font mouvoir l'étrier; une branche de fer *m*; une autre branche de fer *n*; la tige *o* d'un poids *p* tenu par une corroye lâche attachée au ſommier en *q* & *r*. Voilà les pièces qui font mouvoir le régulateur, comme on le verra tout-à-l'heure.

A l'égard du robinet d'injection *R*, ſon tampon eſt ſoudé avec une patte d'écreviſſe *st* qui embraſſe

la

la broche *u x* qui tient au manche d'un grand marteau *y* mobile ſur la charnière *u*. Ce marteau eſt engagé par la tête dans une eſpèce de déclit formé par une coche ou crochet fait dans une pièce de bois horiſontale, tenue à charnière en *D*, & ſuſpendue en *E* avec une corde. La couliſſe *FG* eſt garnie de quatre chevilles ϵ, ζ, π, & dont les diſtances ſe règlent d'après l'épreuve qu'en a faite d'abord le conducteur de la machine.

155. Tout étant ainſi diſpoſé, ſuppoſons que le régulateur étant ouvert, la force de la vapeur, jointe au poids qui eſt appliqué au bras de levier de la droite, faſſe monter le piſton, & par conſéquent auſſi la couliſſe *FG*. La cheville π rencontrant la branche de fer *m* la ſoulève & la fait monter; ce qui fait tourner l'eſſieu *BC* & le poids *p*, lequel, après avoir paſſé la verticale de l'eſſieu, tombe du côté du cylindre & tend la courroye *pr*. Or ce mouvement ne peut s'exécuter ſans que la griffe *k* n'emmène avec elle l'étrier *abcd* qui tire la queue *h*, & fait tourner la clef *i* laquelle ferme la régulateur. En ce moment la vapeur enfermée dans le cylindre *H*, a la même élaſticité, la même force que celle de la chaudière; elle ſoutiendroit donc toujours le piſton. Mais l'inſtant après que le régulateur a été fermé, la couliſſe *FG* frappe la pièce *DE* au moyen de la cheville ϵ. Cette pièce ſe ſoulève & le déclit lâche la tête du marteau *y* qui tombe ſur une planche *L*. Or pendant qu'il tombe, la broche *u x* décrit un arc de cercle qui fait tourner la patte d'écreviſſe & ouvre

par conſéquent le robinet d'injection. Auſſi-tôt l'eau entre dans le cylindre *H*, & jaillit avec toute la force que lui procurent ſa chûte propre & la preſſion de l'atmoſphère. La violence du choc de cette eau contre le deſſous du piſton la diviſe en gouttes qui retombent en pluye dans le cylindre, comme nous l'avons déja dit, & qui condenſent très-promptement la vapeur. Alors le piſton deſcend par la preſſion de l'atmoſphère, & par conſéquent la couliſſe *FG* deſcend auſſi. La cheville ϐ ramène vers *z* la queue *uz'* du marteau *y* qui eſt obligé de remonter & de s'engager de nouveau dans le déclit de la pièce *DE;* ce qui fait tourner la broche *ux*, & par conſéquent la patte d'écreviſſe qui ferme le robinet d'injection. Dans le même temps la cheville & plantée ſur la face de la couliſſe *FG* rencontre le bout de la branche *n* qu'elle fait deſcendre, ce qui oblige l'eſſieu *BC* à tourner & à ramener le poids *p* à la verticale. Alors cette maſſe retombe, par ſa propre peſanteur, du côté de la couliſſe, & la griffe *l* fait tourner l'étrier qui pouſſe le manche *h* & fait tourner la clef *i* qui ouvre de nouveau le régulateur. La couliſſe commence alors à remonter avec le piſton; & quand elle arrive vers le haut de ſa relevée, la cheville π fait de nouveau fermer le régulateur, & la cheville ϐ fait ouvrir le robinet d'injection. Ainſi de ſuite ſans diſcontinuer, tant qu'on entretient du feu ſous la chaudière. Une machine à feu bien montée & de grandeur moyenne, peut donner juſqu'à 15 coups de balancier par minute.

156. On conçoit maintenant que par les mouvemens combinés du régulateur & du robinet d'injection, la machine ira uniformément, si la vapeur est toujours dilatée & condensée de la même manière, & si les effets alternatifs du régulateur & du robinet d'injection se succèdent comme il convient. Or cette régularité de mouvement ne peut être produite ou entretenue dans la pratique, qu'à l'aide de plusieurs robinets & de plusieurs tuyaux qu'on voit dans les Figures 45 & 46. Voici les fonctions de toutes ces pièces.

157. L'eau injectée par l'ajutage 3' retombe dans le fond du cylindre; elle ne peut pas passer dans la chaudière, parce que le collet *K* déborde le fond du cylindre, comme nous l'avons dit. Elle s'échappe par un tuyau *1*, *1*, qui communique par un bout avec le fond du cylindre, & qui est fermé hermétiquement à l'autre bout. A ce tuyau sont adaptés deux autres tuyaux 2, 2, & 3, 3. Fig. 45 & 46.

158. Par le premier 2, 2, il sort environ les trois quarts de l'eau d'injection qui vont se perdre dans une citerne. Le bout de ce même tuyau, qui plonge dans la citerne, est recourbé verticalement en contremont, & garni d'une soupape suspendue à un morceau de fer; cette soupape est toujours baignée dans l'eau pour empêcher que l'air ne pénètre dans le tuyau; elle est fermée quand le piston descend; elle s'ouvre quand le piston monte, parce qu'alors la vapeur qui est dans toute sa force, expulse l'eau contenue dans le tuyau 2, 2.

159. Le ſecond tuyau 3, 3 tranſmet le quart reſtant de l'eau d'injection au tuyau vertical 4, 4 qui pénètre preſque juſqu'au fond de la chaudière, & qu'on appelle *tuyau nourricier*, parce que l'eau qu'il fournit ainſi à la chaudière ſert à réparer la perte qu'elle fait par l'évaporation.

On règle par deux robinets ou même par un ſeul robinet, les quantités d'eau qui doivent paſſer par les tuyaux 2, 2 & 3, 3.

160. La branche inférieure du tuyau 1, 1 porte encore un *godet* 5 au fond duquel eſt une ſoupape ſuſpendue à un cordon, que l'on ſoulève, quand on veut, pour introduire de l'eau dans les tuyaux dont nous venons de parler. Cette eau que l'on tire du haut du cylindre, par le moyen du tuyau deſcendant 6, 6, eſt tiède & ſert à chaſſer l'air des tuyaux où on la fait entrer, quand on commence à faire jouer la machine.

161. A l'oppoſite du tuyau d'injection eſt adapté au cylindre un tuyau 7, 7 qui porte un *godet* 8 dans le fond duquel il y a une ſoupape chargée de plomb, ſuſpendue à un reſſort de fer qui la maintient toujours dans la même direction. Cette ſoupape que l'on nomme *reniflante*, ſert à évacuer l'air que la vapeur chaſſe du cylindre, lorſqu'on commence à faire jouer la machine; & enſuite celui qui eſt amené par l'eau d'injection qui empêcheroit l'effet de la même machine, s'il n'avoit pas la liberté de s'échapper.

162. Sur le chapiteau de l'alembic eſt ſoudé verticalement un petit bout de tuyau 9 au ſommet du-

quel il y a une ſoupape chargée de plomb, qu'on appelle *ventouſe*. Elle ſert à donner de l'air à l'alembic lorſque la vapeur devient trop forte ; elle ſe lève aſſez ſouvent quand le régulateur eſt fermé, & quand le piſton deſcend.

163. Le tuyau *10*, *10* qu'on nomme *cheminée de l'alembic*, & qui eſt fermé à l'une de ſes extrémités par une ſoupape qu'on ſoulève quand on veut, comme on le voit au profil (Fig. 46); ce tuyau, dis-je, ſert à évacuer la vapeur en ouvrant ſa ſoupape lorſqu'on veut arrêter la machine, & à lui donner une échappée lorſqu'elle acquiert aſſez de force pour élever la ſoupape, autrement elle mettroit l'alembic en danger de crever.

164. Les deux petits tuyaux *11*, *11* & *12*, *12*, garnis chacun d'un petit robinet, & qu'on nomme *tuyaux d'épreuve*, ſervent à faire connoître ſi l'eau a une hauteur convenable dans la chaudière. Ils ſont inégaux, comme on voit. L'un trempe ſeulement juſqu'à la vapeur, l'autre pénètre juſqu'à l'eau. Lorſque la hauteur de l'eau eſt bien réglée, le plus long donne de l'eau, & l'autre des vapeurs. S'ils donnoient tous les deux ou des vapeurs ou de l'eau, dans le premier cas l'eau ſeroit trop baſſe, & elle ſeroit trop haute dans le ſecond. Il faudroit donc remédier à l'un ou l'autre inconvénient, en introduiſant de l'eau dans la chaudière, ou en laiſſant échapper l'excédent de celle qu'elle contiendroit.

165. Pour remplir & pour vuider d'eau la chaudière, quand on veut, il y a aux endroits *Q*, *S* deux

tuyaux garnis de leurs robinets (Fig. 46). Le premier sert à faire entrer de l'eau, le second à évacuer la chaudière.

166. La base supérieure du piston est toujours couverte d'eau pour empêcher les cuirs de se sécher & pour fermer toute entrée à l'air extérieur dans la partie inférieure du cylindre où passe la vapeur. Cette eau est amenée par le tuyau *13*, *13*. Une partie de cette eau passe par le tuyau *6*, quand on veut ; l'autre s'échappe par le tuyau *14*.

167. La vapeur, par la force de son ressort qui agit également en toutes sortes de sens, fait monter l'eau dans le tuyau *12*, *12*, comme nous l'avons dit. L'eau est aussi forcée, par la même cause, de monter dans le tuyau nourricier *4*, *4* qui est ouvert par les deux bouts. Elle s'y élève jusqu'à la hauteur de 7 à 8 pieds au-dessus de son niveau dans la chaudière, quand le régulateur est fermé. D'où l'on voit qu'alors la force de la vapeur fait équilibre à la pression de l'atmosphère & au poids d'une colonne d'eau de 7 à 8 pieds de hauteur. Ainsi, puisque la pression de l'atmosphère est équivalente au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, il s'ensuit que la force de la vapeur est à la pression de l'atmosphère, comme 39 est à 32 environ. Lorsque le régulateur s'ouvre, & qu'une partie de la vapeur passe dans le cylindre, cette même vapeur occupant un plus grand espace a moins de force. C'est de-là que vient cette espèce de respiration qu'on remarque dans les fumées qui sortent par les joints imper-

ceptibles de la chaudière ; ces fumées ſont alternatives comme l'haleine des animaux.

168. La chaudière *VIYTZV* eſt ronde en plan. Dans les anciennes machines à feu, elle a le fond plat ; mais on a reconnu que cette forme n'eſt pas propre à bien tranſmettre la chaleur du feu à l'eau ; & aujourd'hui on fait le fond convexe, comme on le voit au profil (Fig. 46). Le chapiteau *VZT* de l'alembic forme une eſpèce de dôme un peu ſurbaiſſé. On voit que l'eau monte dans la chaudière un peu au-deſſus du plat bord *YT*, & que les vapeurs ſont contenues dans l'eſpace qui reſte ſous le chapiteau. La chaudière apiteau ſont faits avec de grandes feuilles uivre de 3 pieds en quarré, liées enſemble av de fortes rivures très-voiſines les unes des autres. L'épaiſſeur de ces feuilles eſt de 3 à 4 lignes.

169. Le feu contenu dans le foyer *II'Y'Y* eſt fait ordinairement avec du charbon de terre jetté ſur la grille *I'Y'*. Il eſt deſtiné à échauffer le fond de la chaudière. Vis-à-vis la porte par où on jette le charbon ſe trouve une entrée où la flamme ſe porte & va circuler autour des côtés de la chaudière dans l'eſpace vuide *VI* & *TY* qu'on appelle la *cheminée de la chaudière*, de telle ſorte qu'elle fait un tour entier autour des côtés & du plat bord de la chaudière avant que de ſortir par un tuyau de cheminée ordinaire qui eſt placé à côté de l'entrée dont je viens de parler. Sans cette circulation de la flamme autour des parois de la chaudière, l'eau qu'elle con-

tient ne s'échaufferoit point suffisamment pour produire la grande quantité de vapeurs dont on a besoin. Du reste on voit que la chaudière porte sur la maçonnerie du fourneau à la circonférence de son fond en *VY*, & que de plus le plat bord est aussi soutenu de même en *V* & *T*. On a soin aussi de garnir de maçonnerie le chapiteau de la chaudière, jusqu'à une certaine hauteur, pour lui donner plus de force contre l'effort des vapeurs, & pour le garantir des coups que le hasard pourroit lui faire recevoir.

170. Dans un des étages supérieurs du bâtiment où est la machine, il y a une cuvette nommée *cuvette d'injection* qui est entretenue par le produit d'une pompe que la machine elle-même fait jouer, & qui fournit de l'eau au tuyau d'injection *QM3'* (Fig. 45). On employe divers moyens pour que ce tuyau reçoive toujours la même quantité d'eau pour chaque injection particulière. Dans la machine à feu, construite à *Schemnitz* en Hongrie, & dont M. Jars, mon Confrère à l'Académie, a bien voulu
Fig. 50. me prêter le dessein, la cuvette d'injection *ABCD* reçoit, au moyen d'un tuyau *K*, l'eau d'un autre réservoir, pour la transmettre au tuyau *Q* d'injection. Le tuyau *K* porte un robinet *X* qui en ouvre & ferme alternativement le bout *T*. Voici comment. A l'axe horisontal *VH* parfaitement mobile sur ses pivots, sont fixées deux branches de fer, l'une *ZM* portant un tonneau ou baril *M* qui flotte sur l'eau, l'autre *ZX* portant une patte d'écrevisse ou une petite roue

dentée qui engraine avec la tête du robinet *X*, & qui le fait tourner. L'écoulement par le tuyau d'injection Q étant ſuſpendu ; à meſure que la ſurface de l'eau s'élève dans la cuvette *ABCD*, elle ſoulève le tonneau *M*, & le robinet ſe ferme, enſorte qu'il eſt entièrement fermé quand elle eſt, par exemple, en *AD*. Si au contraire la cuvette ſe vuide par le tuyau d'injection Q, le tonneau *M* deſcend, & le robinet *X* s'ouvre pour laiſſer paſſer dans la cuvette la nouvelle eau que le tuyau *K* amene. Ainſi de ſuite. Il eſt clair que par-là il paſſe en temps égaux des quantités égales d'eau dans le tuyau d'injection Q.

171. Quand la machine ne joue pas, le balancier eſt incliné du côté du puits, comme on le voit en *or* (Fig. 44), parce que l'air pénétre dans l'intérieur du cylindre, & que le bras de levier du côté du puits eſt plus chargé que celui du côté du cylindre. Le piſton eſt donc alors élevé au plus haut point de ſa courſe. Suppoſons qu'on veuille mettre la machine en mouvement. On remplira d'abord d'eau la chaudière, on allumera le feu pour faire bouillir l'eau, & on aura ſoin d'ouvrir le régulateur, ſuppoſé qu'il fût fermé. La vapeur ſe forme & s'élève dans le cylindre, en chaſſe l'air & échauffe l'eau qui eſt au-deſſus de la tête du piſton. On fait Fig. 45,
paſſer une partie de cette eau, par le tuyau 6, 6, 46.
dans le godet 5 dont on ouvre la ſoupape pour que l'eau entre dans les tuyaux 2, 3, 4. Lorſque la vapeur a acquis aſſez de force pour ouvrir la ſoupape qui ferme la cheminée 10, 10, & pour

ſortir avec détonnation, le conducteur qui attend ce moment, prend d'une main la queue du marteau *y*, de l'autre le marteau *p*, & ferme le régulateur; un inſtant après il ouvre le robinet d'injection qui fait deſcendre le piſton. Enſuite le régulateur s'ouvre de lui-même, & la machine continue de jouer, ſans qu'on y touche. On l'arrête en ſoulevant la ſoupape de la cheminée *10*, *10*, de l'alembic, en évacuant d'eau la chaudière, & en éteignant le feu.

172. Il eſt aiſé de calculer l'effet de cette machine, par le moyen de la formule que nous avons Fig. 44. donnée (150), en évaluant convenablement le poids *B*. On voit que tout ſe réduit à combiner la force de la vapeur & la preſſion de l'atmoſphère, avec les autres poids dont les deux bras du balancier ſont chargés, & à faire enſorte que la ſomme des momens de toutes les forces qui font monter le piſton, ſoit égale à la ſomme des momens de toutes les forces qui le font deſcendre. Par-là on connoîtra la quantité d'eau que les pompes peuvent tirer du puits en un temps donné.

173. La vapeur en s'étendant, preſſe avec une force très-conſidérable les parois intérieures de l'alembic & du cylindre; cette force agit perpendiculairement, du dedans au-dehors, ſur tous les points de ces parois; elle eſt détruite en grande partie par la preſſion de l'air extérieur qui environne la machine & qui agit perpendiculairement aux mêmes parois, du dehors au-dedans. Quand toutes les parties ne réſiſtent pas également, ni avec un effort

ſuffiſant, les plus foibles crèvent; cet accident eſt arrivé quelquefois, ſur-tout dans les premières machines de ce genre qu'on a conſtruites.

174. Les machines à feu ont différentes grandeurs, ſelon l'objet que l'on ſe propoſe en les conſtruiſant. Il y en a dans leſquelles le cylindre a 6 pieds de diamètre intérieur, & le piſton 6 à 7 pieds de jeu. Il y en a de plus grandes encore; & alors on y met ordinairement deux chaudières qui communiquent avec le même cylindre, & qu'on fait bouillir alternativement. Les dimenſions des autres parties de la machine ſe règlent à proportion.

Dans la machine à feu qui eſt établie depuis quelques années aux mines de charbon de Montrelais près d'Ingrande, ſur les confins de l'Anjou & de la Bretagne, le cylindre a 52 pouces $\frac{1}{2}$ de diamètre ſur 9 pieds $\frac{1}{2}$ de hauteur; le jeu du piſton eſt d'environ 6 pieds $\frac{1}{2}$. Elle élève l'eau de la profondeur de 600 pieds, par ſix répétitions de pompes qui ont 3 pouces $\frac{1}{2}$ de diamètre. La chaudière a 15 pieds $\frac{1}{2}$ de diamètre; ſon fond eſt convexe. Le balancier a 25 pieds de longueur ſur 36 pouces d'équarriſſage à ſon milieu. Il n'y a qu'une chaudière.

Dans celle de Freſne, le cylindre a 44 pouces de diamètre, & 9 pieds de hauteur; le jeu du piſton eſt de 6 pieds; le balancier a 25 pieds de longueur; &c.

NOTES SUR LE CHAPITRE II.

Note 1. (*Art.* 87).

I. On n'a pas encore pu trouver d'une manière exacte & conforme à tous les phénomènes, la loi que suivent entr'elles les densités ou pesanteurs spécifiques des couches de l'atmosphère. Voici en quoi consiste le problême en général. Soit $EKBA$ une colonne quelconque d'air. Supposons $AM = x$, $Ma = -dx$, la pression que souffre la tranche $Mmba = P$; la densité ou pesanteur spécifique de l'air en $M = \varpi$; $Mm = 1$. On aura $P = \int -\varpi dx$, ou $dP = -\varpi dx$. Or on connoît la pression P par le poids de la colonne de mercure, suspendue dans le Baromètre, à l'endroit M. La question est de trouver pour ϖ une valeur assujettie à la loi de continuité, & qui soit telle que connoissant P on puisse en conclure en général x. Si cette question pouvoit se résoudre, on détermineroit par le moyen du seul Baromètre, la hauteur des montagnes au-dessus du niveau de la mer, ou en général la position respective, estimée dans le sens vertical, de tous les lieux qu'on voudroit; ce qui seroit très-utile. Mais on est loin de posséder la solution générale de ce problême.

Fig. 26.

II. Soit, par exemple, $\varpi = \frac{P}{m}$, m étant une quantité constante; ce qui suppose que les hauteurs x étant en progression arithmétique, les pressions P

ſont en progreſſion géométrique, comme dans l'article 85. On aura $dx = -\frac{m\,dP}{P}$, & par conſéquent $x = A - mL.P$. La conſtante A doit être telle que x étant donnée, P ſoit auſſi donnée. Suppoſons donc que $x = o$ donne $P = \Pi$; on aura en général $x = mL.\Pi - mL.P = mL.\frac{\Pi}{P}$. Que x devienne ſucceſſivement x, x', x'', &c, & qu'à ces valeurs répondent les preſſions P, P', P'', &c. On aura les équations $x = mL.\frac{\Pi}{P}$, $x' = mL.\frac{\Pi}{P'}$, $x'' = mL.\frac{\Pi}{P''}$, &c. D'où l'on tire cette ſuite de rapports égaux, $x : x' : x'' : \&c :: L.\frac{\Pi}{P} : L.\frac{\Pi}{P'} : L.\frac{\Pi}{P''} : \&c.$ Ainſi connoiſſant l'une des hauteurs x, on trouvera toutes les autres par le moyen du Baromètre & du calcul des logarithmes. Nous avons fait des applications de cette méthode dans l'article 102 ; mais il y a peu de cas où elle réuſſiſſe, comme nous l'avons remarqué.

Toutes les recherches des Géomètres ſur ce ſujet n'ont encore abouti qu'à déterminer ϖ d'une manière particulière & propre ſeulement à quelques phénomènes. Voy. l'Hydrodynamique de M. Daniel Bernoulli, le Traité des Fluides de M. d'Alembert, le Mémoire de M. Euler ſur l'état d'équilibre des Fluides, & pluſieurs autres Ouvrages.

Note 2. (*Art.* 101.)

I. Mon but dans le texte de ce Traité étant de donner exactement les principes de l'Hydrodynamique, je n'y employe que des raiſonnemens Mathématiques, ou fondés, dans le beſoin, ſur l'expérience; & je m'abſtiens, autant qu'il m'eſt poſſible, de toucher aux queſtions qui tiennent à la Phyſique ſyſtématique. En conſéquence je n'ai dû qu'indiquer en gros les explications que différens Auteurs ont données des variations du Baromètre. Mais le ſyſtême de M. Leibnitz ſur ce ſujet, me paroît mériter d'être diſtingué & d'être un peu développé ici.

II. Imaginons avec cet Auteur célèbre (*a*) que les vapeurs deſtinées à former la pluie ſont répandues & diſperſées dans l'atmoſphère. En cet état elles ſont plus légères ſpécifiquement que l'air, & doivent y demeurer ſuſpendues; mais elles augmentent néceſſairement ſon poids, & par conſéquent auſſi la preſſion qu'il exerce ſur la ſurface du mercure contenu dans la cuvette du Baromètre. Ainſi tant que les vapeurs flottent dans l'air, ou que le beau temps dure, le mercure doit ſe tenir haut dans le tube. Mais que les vapeurs pouſſées par les vents, ou par telle autre cauſe qu'on voudra imaginer, viennent à s'amonceller : elles forment des petits corps plus peſans ſpécifiquement que l'air, elles doivent donc tomber en pluie. Or durant qu'elles tombent ainſi, elles ſoulagent l'air d'une partie

(*a*) *Vid. Leibnitii Op. tom. II, Part. II, pag.* 75 *& ſeq.*

de leurs poids ; d'où il suit que l'air devient plus léger, & que par conséquent le Baromètre doit descendre. M. Leibnitz apporte en preuve, ou en éclaircissement, cette proposition de méchanique que l'expérience confirme. Soit *AB* un tube plein d'eau, Fig. 52
fermé en *B*, attaché à l'un des bras d'une balance, & en équilibte avec un poids *C*. Qu'un corps creux *D* flotte sur l'eau, & que ce corps soit d'une matière plus pesante spécifiquement que l'eau, de manière que si l'eau vient à entrer dans sa cavité par un orifice, ce corps *D* descende. L'équilibre persévère, tant que l'orifice proposé demeure bouché. Mais qu'on l'ouvre : l'eau entre dans le corps *D* & rompt bientôt l'équilibre ; le corps *D* descend & le poids *C* fait monter le tuyau *AB*. La raison en est évidente ; car la force qui fait descendre le corps *D* n'étant plus soutenue par le poids *C*, il est clair que le poids *C* est plus grand qu'il ne faut pour l'équilibre, de toute cette même force. Or on peut comparer le poids *C* à la colonne de mercure suspendue dans le Baromètre, l'eau du tube à la colonne d'air, & le poids *D* aux gouttes de pluie. D'où l'on voit que lorsque les gouttes deviennent assez grandes pour ne pouvoir plus être soutenues par l'air, & qu'elles tombent en conséquence, la colomne d'air est plus légère qu'auparavant, & qu'ainsi le mercure doit baisser dans le Barométre. Au contraire dans un temps serein les gouttes d'eau divisées en parties très-déliées, sont soutenues par l'air qui en devient plus pesant & doit faire monter le mercure dans le Baromètre.

La deſcente du mercure précéde un peu la chûte de la pluie, parce que les gouttes commencent à ſe former avant que d'arriver juſqu'à nous.

III. Cette explication paroît fort ſimple & fort naturelle. Mais pour l'apprécier plus exactement, donnons un peu plus de juſteſſe à l'exemple de comparaiſon de M. Leibnitz; conſidérons un corps qui deſcend par ſa peſanteur dans un fluide contenu dans un vaſe immobile, & cherchons la preſſion que ce corps exerce ſur le fond du vaſe. Le problême eſt facile à réſoudre, comme on le va voir, lorſqu'on connoît la loi ſuivant laquelle les fluides réſiſtent au mouvement des corps ſolides qui les traverſent. Nous ſuppoſerons, pour fixer les idées & la queſtion, que le corps propoſé eſt ſphérique, & que le fluide où il deſcend, eſt de l'eau contenue dans un vaſe cylindrique & vertical.

IV. Les Lecteurs auxquels je parle ici, ſçavent (& on en trouvera d'ailleurs la démonſtration dans le chapitre ſuivant) qu'un corps ſolide plongé dans un fluide plus léger ſpécifiquement que lui, tend à deſcendre avec l'excès de ſon poids abſolu ſur le poids abſolu du volume de fluide qu'il déplace, & qu'il deſcendroit effectivement avec toute cette force ſans la réſiſtance qu'il éprouve en diviſant & frappant les parties contigues du fluide. Or il eſt évident que cette réſiſtance ſe tranſmet en tout ſens à travers le fluide, & qu'elle preſſe par conſéquent le fond du vaſe. De plus on voit qu'elle eſt la ſeule force, provenant de la chûte du corps, que le fond ſoutienne

ſoutienne par ſa réaction ; car ſi l'on imagine qu'elle ſoit anéantie, le fond n'eſt pas plus preſſé que ſi le corps ſolide n'exiſtoit pas, ou que s'il demeuroit ſuſpendu par quelque cauſe extérieure, pourvu que la hauteur du fluide au-deſſus du fond ſoit la même dans tous les cas. Il ne s'agit donc que de trouver la valeur de cette même réſiſtance.

V. Suppoſons, comme on fait ordinairement par les raiſons que nous en donnerons dans la ſeconde Partie de ce Traité, que la réſiſtance d'une ſurface plane, mue perpendiculairement à elle-même dans un fluide, ſoit proportionnelle au produit de cette ſurface par le quarré de ſa vîteſſe. De plus ſuppoſons, comme il ſera encore prouvé dans la ſeconde Partie, que la réſiſtance d'une ſphère ne ſoit que la moitié de celle qu'éprouveroit perpendiculairement un de ſes grands cercles, ſous même vîteſſe. Soient

le raïon du corps ſphérique deſcendant . . . . . $= R$
le poids abſolu ou la maſſe de ce corps . . . . . $= P$
le poids abſolu du volume fluide qu'il déplace . . . . $= P'$
le rapport de la circonférence au diamètre . . . . $= \pi$
l'eſpace parcouru verticalement par le corps . $= s$
la vîteſſe qu'il a au bout de cet eſpace . . . . . $= u$
la réſiſtance qu'éprouve une ſurface plane donnée a^2, mue perpendiculairement dans l'eau avec la vîteſſe donnée V . . . . $= F$
la réſiſtance qu'éprouve la ſphère propoſée . . . . $= f$.

Il eſt facile de voir que $f = \frac{F . \Pi R^2 u^2}{2 a^2 V^2}$, & que par conſéquent on connoîtra f, lorſque l'on connoîtra u. De plus on voit que $P - P' - \frac{F . \Pi R^2 u^2}{2 a^2 V^2}$ eſt la force qui pouſſe le corps de haut en bas. Ainſi on aura, par le principe ordinaire des forces accélératrices,

$$P u d u = \left(P - P' - \frac{F . \Pi R^2 u^2}{2 a^2 V^2}\right) d s.$$

Soient, pour abréger, $P - P' = M$, $\frac{F \Pi R^2}{2 a^2 V^2} = n$; notre équation pourra ſe changer en celle-ci,

$$P u d u + n u^2 d s = M d s.$$

Multiplions tous les termes de cette équation par une fonction ϕ de s, qui ſoit ſuppoſée la rendre intégrable; ce qui donne d'abord

$$\phi P u d u + \phi n u^2 d s = \phi M d s.$$

Enſuite ſuppoſons qu'on ait $\frac{\phi P u^2}{2} = \int \phi M d s$, & par conſéquent

$$\phi P u d u + \frac{P u^2 d \phi}{2} = \phi M d s.$$

En comparant enſemble les deux équations différentielles, terme à terme, on aura $\frac{P u^2 d \phi}{2} = \phi n u^2 d s$, ou bien $\frac{d \phi}{\phi} = \frac{2 n}{P} . d s$, & $L . \phi = \frac{2 n s}{P}$. Donc en nommant c le nombre dont le logarithme

est 1, $\phi = c^{\frac{2ns}{P}}$. Mettons cette valeur de ϕ dans l'équatïon $\frac{\phi P u^2}{2} = \int \phi M d s$, & nous aurons

$$\frac{P u^2 . c^{\frac{2ns}{P}}}{2} = \int M d s . c^{\frac{2ns}{P}} = \frac{M . P}{2n} c^{\frac{2ns}{P}} + A.$$

La constante A doit être telle que $s = o$ donne $u = o$; ce qui donne $A = - \frac{M . P}{2n}$. Donc $u^2 = \frac{M}{n}$ $\left[1 - c^{\frac{-2ns}{P}}\right]$, & par conséquent enfin,

$$f = M \left[1 - c^{\frac{-2ns}{P}}\right].$$

VI. Maintenant, pour sçavoir ce que devient cette quantité à mesure que s augmente, nous observerons que suivant notre calcul, c est le nombre dont le logarithme est 1 dans la logarithmique qui a 1 pour soutangente. De plus nous nous rappellerons que dans la logarithmique des tables ordinaires, la soutangente est 0,43429, & que les logarithmes d'un même nombre, pris dans deux logarithmiques différentes, sont entr'eux comme les soutangentes de ces logarithmiques. D'où il suit que nous aurons 1 : 0,43429 :: 1 : au logarithme de c, dans les tables ordinaires. Ce logarithme étant 0, 43429, le nombre c est compris entre 2 & 3. Or puisque c est ainsi plus grand que l'unité, il est visible que M, P, n étant des quantités finies, f augmente à

meſure que s augmente, & que $f = M$ lorſque $s = \infty$.
Donc à cauſe de $M < P$, on aura auſſi toujours $f < P$.

On voit par-là que comme la hauteur dont une goutte de pluie tombe, n'eſt jamais fort conſidérable, la réſiſtance qu'elle éprouve en deſcendant, ou la preſſion qu'elle exerce en conſéquence ſur la ſurface de la terre, eſt toujours ſenſiblement moindre que le poids de cette même goutte. Donc la preſſion de l'atmoſphère ſur la terre eſt moindre lorſque la pluie tombe que lorſque les gouttes flottent en parcelles dans l'atmoſphère. Le Baromètre doit donc deſcendre dans un temps pluvieux.

VII. On objecte contre cette explication que le mercure ne devroit deſcendre que quand il pleut actuellement; ce qui n'arrive pas toujours. Mais on peut répondre que quoique les particules commencent à ſe ſéparer de l'air & à tomber, elles ne parviennent pas tout d'un coup juſqu'à nous. Souvent leur chûte eſt retardée, ou même tout-à-fait empêchée par le vent qui les diſperſe, ou les porte dans des endroits éloignés. On objecte encore que les plus grandes variations du Baromètre ſe font remarquer dans les temps d'orage. Mais cela ne détruit pas l'explication propoſée qui ſatisfait aux phénomènes les plus ordinaires. M. Leibnitz convient d'ailleurs que les vents doivent produire des changemens très-ſenſibles dans le poids de l'atmoſphère. Par exemple, deux vents qui viennent à la rencontre l'un de l'autre compriment l'air qu'ils rencontrent, le rendent plus denſe, & augmentent ainſi ſon poids. Au contraire deux vents

qui vont en ſens oppoſés diſperſent & raréfient l'air, le rendent plus léger, & par conſéquent d'autant moins propre à ſoutenir les vapeurs pluviales. On conçoit qu'il eſt comme impoſſible de ſoumettre tous ces effets à un calcul précis, & que les prédictions du Baromètre ſont toujours ſujettes à quelques incertitudes.

VIII. Quant à la cauſe des vents, nous avons déja remarqué que la plus ordinaire eſt la différente raréfaction que les couches de l'atmoſphère éprouvent par la chaleur ou par le froid. De plus les attractions du ſoleil & de la lune qui produiſent le flux & reflux de la mer, occaſionnent des mouvemens ſemblables dans l'air. Ces cauſes générales ſe combinent enſemble, & avec d'autres cauſes particulières & locales, d'une infinité de façons; & il en réſulte des courans d'air ou des vents en différens ſens. Les uns ont conſtamment la même direction, comme par exemple le vent d'eſt qui ſouffle perpétuellement entre les deux tropiques; les autres ſe meuvent irrégulièrement, & leurs directions ſont modifiées, altérées, changées par les montagnes, les vallées, les bois, les cavernes, & en général par les obſtacles de toute eſpèce que l'air rencontre dans ſon chemin ſur la ſurface de la terre.

IX. Quoique le ſyſtême de M. Leibnitz, ſur la cauſe des variations du Baromètre, me paroiſſe vraiſemblable & ſatisfaiſant à pluſieurs égards, je ne prétends point l'adopter excluſivement. Peut-être faut-il faire entrer dans la queſtion encore d'autres élé-

mens. Les idées de M. de Mairan à ce ſujet me paroiſſent, ſur-tout, dignes d'attention. Voy. le chap. XIII, I. Part. de ſa *Diſſertation ſur la Glace*, Ouvrage rempli d'expériences & de vûes nouvelles ſur les points les plus importans de la Phyſique générale.

CHAPITRE III.

De l'équilibre des fluides avec les corps ſolides qui y ſont plongés.

175. LA ſurface d'un corps ſolide plongé dans un fluide eſt preſſée perpendiculairement en tous ſes points par le fluide adjacent, de la même maniere & par les mêmes raiſons que le fond & les parois d'un vaſe ſont preſſés par la liqueur qu'il contient. De toutes ces preſſions réſulte une force qui tend à ſoulever le corps, & qui ne peut être détruite que par la peſanteur même de ce corps, ou par une cauſe extérieure, ou enfin par la peſanteur combinée avec une force extérieure. Je vais examiner d'abord la maniere préciſe d'établir cet équilibre; nous verrons enſuite comment il peut ſe conſerver, ou ſe rétablir, ſuppoſé que quelque cauſe l'ait troublé. Les principes généraux ſeront éclaircis, lorſqu'il le faudra, par des applications à des exemples utiles, ou propres à montrer facilement l'uſage de la théorie.

SECTION I.

Loix de l'équilibre d'un corps ſolide enfoncé dans un fluide.

176. Commençons par nous rappeller ici la propoſition ſuivante de Méchanique, avec ſa démonſtration.

Si ſur les milieux des côtés EA, AB, BC, CD, DE *d'un polygone inflexible* EABCD *ſont appliquées perpendiculairement les puiſſances* P, Q, R, S, T *proportionnelles chacune à chacun des mêmes côtés, & toutes dirigées du dehors au dedans, ou du dedans au dehors, dans le plan du polygone : ces puiſſances ſeront en équilibre.* Fig. 52.

DEM. Qu'on mène les diagonales *BE*, *BD*. Il eſt clair, par le principe de la compoſition & de la décompoſition des forces, que deux forces concourantes en un point, & leur réſultante qui paſſe néceſſairement par ce même point, peuvent être repréſentées par les côtés d'un triangle, perpendiculaires chacun à chacune des trois forces propoſées. Ainſi les deux forces P, Q étant perpendiculaires & proportionnelles aux côtés *EA*, *AB* du triangle *EAB*, ont pour réſultante une force, que je nomme *X*, perpendiculaire & proportionnelle au côté *BE* du même triangle. De plus la force *X* eſt perpendiculaire ſur le milieu de *BE*; car elle doit paſſer par le point de concours *a* des deux forces compoſantes *P*, *Q*, qui eſt évidemment le centre d'un

cercle qu'on circonſcriroit au triangle EAB; d'où il ſuit que la force X eſt perpendiculaire ſur le milieu de la corde EB. On démontrera de la même manière que les deux forces T, X ont pour réſultante une force, que je nomme Y, proportionnelle à BD & perpendiculaire ſur le milieu de BD; que les deux forces R, S ont pour réſultante une force, que je nomme Z, proportionnelle à BD, & perpendiculaire ſur le milieu de BD. Or lorſque toutes les puiſſances P, Q, R, S, T agiſſent du dehors au dedans, ou du dedans au dehors du polygone, les deux réſultantes finales Y & Z ſont évidemment égales & directement oppoſées. Donc elles ſe détruiſent, & le ſyſtême de toutes les forces propoſées eſt en équilibre. C. Q. F. D.

177. La démonſtration eſt la même, quel que ſoit le nombre des côtés du polygone. Elle a donc également lieu, lorſque le nombre des côtés du polygone devient infini. Or on peut regarder une courbe rentrante quelconque comme un polygone d'une infinité de côtés. Donc ſi l'on conçoit une courbe rentrante quelconque, inflexible, partagée en une infinité d'élémens, & qu'au milieu de ces élémens on applique perpendiculairement des puiſſances qui leur ſoient proportionnelles; ces puiſſances ſont en équilibre.

178. De-là on peut conclure encore que ſi à tous les points d'une courbe rentrante, inflexible, ſont appliquées perpendiculairement des forces égales, ces forces ſont en équilibre; car il en réſulte évidemment des puiſſances proportionnelles aux élémens de la courbe, & perpendiculaires ſur leurs milieux.

PROPOSITION I.

179. *Lorſqu'un corps ſolide eſt plongé dans un fluide, 1°. la force avec laquelle le fluide tend à le ſoulever verticalement, eſt égale au poids du volume de fluide déplacé. 2°. La direction verticale de cette force paſſe par le centre de gravité du volume fluide déplacé, ou ce qui revient au même, par le centre de gravité de la partie du corps, plongée dans le fluide, & conſidérée comme homogène.*

DÉMONSTRATION.

Imaginons que la partie du corps plongée dans le fluide, eſt partagée en une infinité de tranches par des plans horiſontaux. Concevons enſuite que la ſurface convexe de chacune de ces tranches eſt partagée en une infinité de trapèzes par des plans verticaux & de plus perpendiculaires à ces mêmes trapèzes. Il eſt facile de ſe repréſenter la poſition des plans dont il s'agit, en conſidérant que par chaque point de la ſurface convexe d'une tranche on peut élever une ligne verticale, & une ligne perpendiculaire en cet endroit à la ſurface convexe de la tranche : le plan qui paſſera par ces deux lignes ſera tout-à-la-fois vertical, & perpendiculaire à la ſurface convexe de la tranche.

Soient *MNYZ* (Fig. 53) la baſe inférieure & horiſontale de l'une des tranches dont nous venons de parler, *Ma* la baſe de l'un des trapèzes élémentaires qui compoſent la ſurface convexe de la même Fig 53 & 54.

tranche. J'appellerai X ce trapèze. Par le point M, soit élevé (Fig. 54) le plan $AMDB$ vertical & de plus perpendiculaire au trapèze X; d'où il résulte que ce même plan $AMDB$ coupe le plan horisontal $MNYZ$, suivant une droite MY perpendiculaire à l'élément Ma. Qu'on mène par le point m infiniment proche de M, le plan horisontal my qui représente la base supérieure de la tranche proposée. Du point M, soit elevée la verticale MP jusqu'à la surface AB du fluide.

Cela posé, il est clair par les principes établis ci-dessus que tous les points de la surface plongée dans la liqueur sont pressés perpendiculairement avec des forces proportionnelles à leurs distances au niveau AB de la même liqueur. Ainsi en prenant la densité ou pesanteur spécifique du fluide pour l'unité, le trapèze X qui a Ma pour base & Mm pour hauteur, souffre une pression perpendiculaire qui est exprimée par $Ma \times Mm \times MP$. Représentons cette force par MF perpendiculaire à Mm, & décomposons-la en deux autres forces ME, MG, l'une horisontale, l'autre verticale. Les deux triangles semblables MHm, MEF donnent ces deux proportions $Mm : MH :: MF : ME$, & $Mm : Hm :: MF : EF$ ou MG. Donc $ME = MF \times \frac{MH}{Mm} = Ma \times Mm \times MP \times \frac{MH}{Mm} = Ma \times MP \times MH$; & $MG = MF \times \frac{Hm}{Mm} = Ma \times Mm \times MP \times \frac{Hm}{Mm} = Ma \times MP \times Hm$. Or

l'expreſſion $Ma \times MP \times MH$ ſignifie, comme on voit, qu'à tous les points de l'élément Ma ſont appliquées perpendiculairement des puiſſances égales, exprimées chacune par le produit conſtant $MP \times MH$. Il en eſt de même pour tous les autres élémens de la courbe $MNYZ$. Chacun de leurs points eſt preſſé perpendiculairement & horiſontalement, avec une force exprimée par le même produit $MP \times MH$. Donc toutes ces preſſions ſe détruiſent (178). Il ne reſte donc des deux forces dans leſquelles la force MF a été décompoſée, que la force verticale MG ou $Ma \times Hm \times MP$. Or il eſt clair que la ſomme de tous les produits de cette dernière claſſe compoſe le volume du fluide dont le corps occupe la place. Donc,

1°. La ſomme ou la réſultante verticale des forces verticales avec leſquelles le fluide tend à ſoulever le corps, eſt égale à la ſomme des petits poids qui compoſent le poids total du fluide déplacé par ce corps.

2°. Les directions de ces deux forces ſont placées ſur une même ligne verticale; car les directions de leurs forces élémentaires, correſpondantes, ſont placées dans une même ligne verticale. Ainſi l'effort vertical avec lequel le fluide tend à ſoulever le corps, paſſe par le centre de gravité du volume de fluide déplacé, ou par le centre de gravité de la partie du corps plongée dans le fluide, & conſidérée comme homogène. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

180. Si un corps abandonné à l'action de la pesanteur & flottant sur un fluide, est dans une immobilité absolue, ces deux conditions ont toujours lieu tout-à-la-fois. 1°. Le poids du corps est égal au poids du volume de fluide déplacé. 2°. le centre de gravité du corps & celui de la partie enfoncée dans le fluide, considérée comme homogène, sont placés dans une même ligne verticale. Car pour l'équilibre, il faut 1°. que le poids du corps soit égal à l'effort du fluide qui tend à le soulever verticalement. 2°. Il faut que ces deux forces soient directement opposées.

Lorsque ces deux conditions n'ont pas lieu tout-à-la-fois, le corps oscille & ne parvient à l'équilibre que quand la résistance de l'eau & de l'air, ou d'autres causes ayant anéanti tous ses mouvemens, il trouve enfin & conserve une situation telle que son poids & la poussée verticale du fluide se détruisent mutuellement. On voit par-là que si l'on veut qu'un vaisseau flottant sur la mer enfonce dans l'eau une partie *déterminée* de son volume, il faut tellement proportionner & distribuer la charge, qu'en ajoutant son poids à celui de la coque même du vaisseau, la somme soit égale au poids du volume d'eau qui doit être déplacé; & que de plus les centres de gravité de ces deux poids soient situés dans une même ligne verticale.

Dans les corollaires généraux qui suivent, je sup-

pose que le centre de gravité du corps solide & celui de sa partie enfoncée dans le fluide, sont placés dans une même ligne verticale; mais j'expliquerai ci-dessous la manière de remplir cette condition, pour des corps particuliers, de figure donnée.

COROLLAIRE II.

181. En nommant M le volume total du corps flottant, N sa partie enfoncée dans le fluide & considérée toujours comme homogène, p sa pesanteur spécifique, ϖ celle du fluide; il est clair (17) que le poids absolu du corps proposé est exprimé par $p \times M$, & celui du fluide déplacé, par $\varpi \times N$. Ainsi la condition d'équilibre que nous avons ici à remplir, donne l'équation $p \times M = \varpi \times N$. D'où l'on voit,

1°. Que si la pesanteur spécifique du fluide est plus grande que celle du corps, ce corps surnagera, car on aura $N < M$.

2°. Que si le corps & le fluide ont même pesanteur spécifique, le corps s'enfoncera entièrement dans le fluide & s'y tiendra d'ailleurs indifféremment à telle profondeur qu'on voudra; car alors on doit avoir $N = M$.

3°. Que si la pesanteur spécifique du corps est plus grande que celle du fluide, le corps ne peut pas demeurer suspendu dans le fluide sans le secours d'une puissance qui le soutienne en partie; car alors on a $p \times M > \varpi \times N$. D'où il suit que le corps livré à lui-même doit s'enfoncer entièrement & descendre

jusqu'au fond du vase, abstraction faite de toute résistance.

COROLLAIRE III.

182. Supposons que le corps surnage librement, ou que sa pesanteur spécifique soit moindre que celle du fluide. De l'équation $p \times M = \varpi \times N$, on tire la proportion $p : \varpi :: N : M$, c'est-à-dire que *la pesanteur spécifique du corps est à celle du fluide, comme le volume de la partie du corps, plongée dans le fluide, est au volume total du même corps.* Connoissant trois termes quelconques de cette proportion, on déterminera celui qui est inconnu.

COROLLAIRE IV.

183. On voit par la même équation $p \times M = \varpi \times N$, que si l'on connoît simplement le poids absolu d'un corps flottant sur un fluide & la pesanteur spécifique de ce fluide, on pourra trouver le volume de la partie que le corps enfonce dans le fluide.

Par exemple, je suppose que ce corps pese 20 livres, qu'il soit plongé dans l'eau, & que le pied cube d'eau pese 70 livres. Nous aurons (hyp.), $p \times M = 20$ livres, & par conséquent aussi $\varpi \times N = 20$ livres. Il ne s'agit plus que de trouver le volume d'un corps d'eau qui pese 20 livres. Pour cela on fera la proportion, 70 livres : 1 pied cube ou 1728 pouces cubes :: 20 livres : $N = 493 \frac{5}{7}$ pouces cubes.

Corollaire V.

184. Si l'on augmente ou diminue le volume N que le corps flottant enfonce dans le fluide, d'une quantité n, il faudra, pour maintenir l'équilibre, augmenter ou diminuer le poids abſolu $p \times M$ du même corps, d'un poids q tel que l'on ait $p \times M \pm q = \varpi \times N \pm \varpi \times n$, ou bien $q = \varpi \times n$. Le poids additionnel ou ſouſtractif q eſt donc toujours égal au poids du volume n de fluide que le corps déplace de plus ou de moins que dans ſon premier état.

On déterminera par-là les changemens qui arrivent à la flottaiſon d'un vaiſſeau, lorſqu'on fait quelque changement à ſa charge ou au volume qu'il enfonce dans la mer.

Corollaire VI.

185. Cette tendance que les fluides ont à ſoulever les corps flottans eſt employée tous les jours avec ſuccès à tirer des fardeaux très-peſans du fond d'une rivière ou de la mer. On prend pour cela, un bateau d'un grand volume qu'on fait enfoncer profondément en le chargeant de poids très-peſans; en cet état on l'attache ſolidement au fardeau qu'on veut élever. Enſuite on ôte, en partie ou en totalité, les poids qui l'avoient fait enfoncer; & alors il s'élève en vertu de la pouſſée verticale du fluide, & fait monter le fardeau auquel il eſt attaché, avec une force qui, au premier inſtant, eſt égale à la ſomme des poids dont on l'a déchargé.

COROLLAIRE VII.

186. Puiſqu'un corps ſolide plus peſant ſpécifiquement que le fluide où il eſt plongé, s'y enfonce entièrement, & ne peut demeurer ſuſpendu qu'à l'aide d'une force extérieure (181, n°. 3), il eſt évident que ſi l'on nomme M ſon volume total, p ſa peſanteur ſpécifique, ϖ celle du fluide, Q le poids qu'il faut appliquer à l'un des bras égaux d'une balance qui ſoutient à ſon autre bras le corps propoſé, plongé entièrement dans le fluide, il eſt clair, dis-je, que $p \times M - \varpi \times M$ étant le poids qui reſte à notre corps dans le fluide, on doit avoir, pour l'équilibre, $Q = p \times M - \varpi \times M$, ou $p \times M - Q = \varpi \times M$, ou $p \times (p \times M - Q) = p \times \varpi \times M$. Donc $p : \varpi :: p \times M : p \times M - Q$, c'eſt-à-dire que *la peſanteur ſpécifique du corps eſt à celle du fluide, comme le poids abſolu du même corps, eſt à la perte de poids qu'il fait dans le fluide.* Ainſi connoiſſant la peſanteur ſpécifique du corps ſolide, ſon poids abſolu, la perte de poids qu'il fait dans un fluide où il eſt entièrement plongé, on connoîtra la peſanteur ſpécifique de ce fluide.

On doit remarquer qu'en peſant un corps dans l'air contre un autre qui eſt plongé dans un fluide, le premier paroît un peu plus leger qu'il n'eſt réellement, parce que l'air, comme fluide peſant, diminue un peu le poids des corps qui y ſont plongés; mais cette diminution eſt très-legère, & peut ordinairement ſe négliger ſans craindre d'erreur ſenſible. Du reſte ſi l'on veut pouſſer la préciſion

auſſi

aussi loin qu'il est possible, on fera l'opération sous le récipient de la machine pneumatique, après en avoir pompé l'air; ou bien on évaluera le poids du volume d'air dont le corps qui y est plongé occupe la place, & on ajoutera ce poids à celui du même corps.

COROLLAIRE VIII.

187. Qu'on plonge le corps solide de l'article précédent dans un second fluide encore plus léger spécifiquement que lui, & dont la pesanteur spécifique soit ϖ'; que le contrepoids Q devienne ici Q'. On aura les deux équations, $Q = p \times M - \varpi \times M$, $Q' = p \times M - \varpi' \times M$, lesquelles donnent $\varpi \times (p \times M - Q') = \varpi' \times (p \times M - Q)$; & par conséquent $\varpi : \varpi' :: p \times M - Q : p \times M - Q'$, c'est-à-dire que *les pesanteurs spécifiques des deux fluides sont entr'elles, comme les pertes de poids qu'y fait un même corps solide plus pesant spécifiquement que chacun d'eux.*

COROLLAIRE IX.

188. L'une ou l'autre équation fondamentale des deux articles précédens; par exemple, l'équation $Q = p \times M - \varpi \times M$ peut servir à trouver le volume M d'un corps solide qui s'enfonce entièrement dans un fluide, lorsque la pesanteur spécifique de ce fluide est donnée. Car puisqu'on a $\varpi \times M = p \times M - Q$, il est clair que si du poids absolu $p \times M$ du corps, on retranche le poids Q qu'il a dans le fluide, le

reste $\varpi \times M$ est le poids du volume de fluide déplacé. Or la pesanteur spécifique du fluide étant donnée, ce volume qui est le même que celui du corps est facilement déterminable. Cela est analogue à l'article 183.

Il est évident par-là que si le corps proposé est homogène & n'a pas de cavités intérieures, on connoîtra sa pesanteur spécifique, puisque, par hypothèse, on connoît son poids absolu, & qu'on peut déterminer son volume.

COROLLAIRE X.

189. Soient plongés dans un même fluide deux corps solides plus pesans spécifiquement que lui. Nommons M & M' leurs volumes; p & p' leurs pesanteuts spécifiques; Q & Q' leurs contrepoids, c'est-à-dire les forces qu'il faut employer pour les retenir en équilibre dans le fluide; ϖ la pesanteur spécifique de ce fluide. On aura les équations $Q = p \times M - \varpi \times M$, $Q' = p' \times M' - \varpi \times M'$. Donc si l'on suppose que les deux corps perdent des parties égales de leurs poids dans le fluide, ou qu'on ait $p \times M - Q = p' \times M' - Q'$, on aura aussi $\varpi \times M = \varpi \times M'$, ou $M = M'$. D'où l'on voit que les corps qui perdent des parties égales de leurs poids dans un même fluide, ont des volumes égaux.

COROLLAIRE XI.

190. De-là suit la manière de résoudre le problême que Hieron, Roi de Syracuse, proposa à

Archimède. Voici en quoi consistoit ce problême.

Hieron ayant fait faire une couronne qui, selon ses conventions avec l'Orfèvre, devoit être d'or pur, & soupçonnant qu'on y avoit mêlé de l'argent, demanda à Archimède la manière d'éclaircir ce soupçon, sans endommager la couronne. On ne connoît pas bien exactement les moyens qu'Archimède employa pour cela ; mais il y a toute apparence qu'il s'y prit ainsi.

Puisque les corps qui perdent des parties égales de leurs poids dans un même fluide, ont des volumes égaux (189), il est clair que si l'on prend un lingot d'or, tel que l'excès de son poids dans l'air, ou dans le vuide, sur son poids dans l'eau, soit égal à l'excès du poids de la couronne dans le vuide, sur son poids dans l'eau, ce lingot & la couronne auront des volumes égaux. On déterminera de la même manière un lingot d'argent de même volume que la couronne.

Cela posé, si l'on trouve que dans le vuide la couronne pese moins que le lingot d'or & plus que le lingot d'argent, & si l'on est assuré d'ailleurs qu'elle ne contient que de l'or & de l'argent, on conclura qu'elle n'est ni d'or, ni d'argent purs, mais un composé de ces deux métaux ; & on trouvera ce qu'il y entre de chacun d'eux par une simple règle d'alliage dont voici l'opération. Du poids du lingot d'or il faut retrancher le poids du lingot d'argent ; ce qui donnera un reste qu'on fera servir de dénominateur commun à deux fractions, dont l'une ait

pour numérateur l'excès du poids du lingot d'or ſur le poids de la couronne ; l'autre, pour numérateur auſſi, l'excès du poids de la couronne ſur le poids du lingot d'argent. La première fraction exprime la quantité d'argent; la ſeconde, la quantité d'or, dont la couronne eſt compoſée.

La queſtion ſe réſoudroit par les mêmes procédés ſi la couronne étoit compoſée de deux autres métaux dont on connût l'eſpèce. Mais cette méthode ſeroit inſuffiſante, ſi l'eſpèce des métaux étoit inconnue, ſi on ne ſçavoit pas, par exemple, dans le problême précédent que la couronne ne contient que de l'or & de l'argent ; car il eſt clair qu'on peut faire avec de l'or & un autre métal, tel que du cuivre, un mixte de même poids & de même volume qu'un mixte compoſé d'or & d'argent. De plus ſi la couronne contenoit plus de deux eſpèces de métaux, qu'on ſçût, par exemple, qu'elle eſt compoſée d'or, d'argent & de cuivre, le problême ſeroit indéterminé; car on peut combiner enſemble ces trois métaux de pluſieurs manières, telles que le mixte réſultant ait le même poids & le même volume. Il en eſt de même *à fortiori* pour un plus grand nombre de métaux.

COROLLAIRE XII.

191. Les moyens propoſés (186, 187), les plus exacts qu'on connoiſſe pour trouver les peſanteurs ſpécifiques des fluides, ne ſont pas néantmoins les ſeuls en uſage. On employe ordinairement, dans le commerce, pour le même objet, ces inſtrumens

nommés *aréomètres* ou *pese-liqueurs* qui sont d'une pratique très-simple & très-commode.

La forme d'un aréomètre est arbitraire jusqu'à un certain point ; elle doit cependant être telle qu'il divise facilement le fluide en s'enfonçant plus ou moins, & qu'il se maintienne dans la situation verticale. Celui de Fahrenheit a ces propriétés. Il est composé d'un long tube cylindrique CD, & de deux boules creuses A, B ; la plus basse B qui est la plus petite reçoit du mercure, ou quelqu'autre matière pesante qui sert de *lest* à l'instrument & lui procure de la stabilité ; l'autre A, toujours submergée, élève le centre de gravité de la partie de l'aréomètre, qui est plongée dans le fluide ; ce qui augmente encore sa stabilité. Cet instrument peut servir à trouver les pesanteurs spécifiques des fluides, ou en le faisant enfoncer toujours à la même profondeur au moyen de poids dont on le charge ou le décharge, ou en lui conservant le même poids, & lui permettant de s'enfoncer librement à différentes profondeurs. Examinons briévement les deux cas. Fig. 55.

1°. Supposons que l'aréomètre s'enfonce jusqu'au point M dans deux fluides différens. Soient P & $P \pm q$ les poids absolus qu'il doit avoir pour cela ; ϖ & ϖ' les pesanteurs spécifiques des deux fluides ; G le volume de la partie constante $MABN$ de l'aréomètre. On aura (181), $P = \varpi \times G$, $P \pm q = \varpi' \times G$. Donc $\varpi' = \frac{\varpi \times (P \pm q)}{P}$. Ainsi connoissant P, ϖ, & le poids additif ou soustractif q, on connoîtra ϖ'.

2°. Si l'on veut que l'aréomètre ait toujours le même poids, il s'enfoncera à différentes profondeurs dans deux fluides différens. Soient K, M les points auxquels il s'enfonce ; & nommons P son poids absolu, H & G les volumes $KABH$, $MABN$ qu'il enfonce dans les deux fluides ; ϖ & ϖ' les pesanteurs spécifiques de ces fluides. On aura (181) $P = \varpi \times H$, $P = \varpi' \times G$. Donc $\varpi' = \frac{\varpi \times H}{G}$. Connoissant donc ϖ, H, G, on connoîtra ϖ'.

Lorsque l'aréomètre est d'une figure régulière & connue, il est facile de toiser, par les règles de la Géométrie, les volumes H, G. Mais ordinairement la forme de l'instrument ne permet pas d'employer cette méthode avec exactitude. Alors on peut graduer l'aréomètre par cet autre moyen, fondé sur l'article 183, qui est très-commode dans la pratique. Soient V, K les points extrêmes où l'aréomètre s'enfonce dans deux liqueurs dont l'une est la plus légère, l'autre la plus pesante de toutes celles dont on veut connoître les pesanteurs spécifiques. On divisera l'intervalle VK en tant de parties égales ou inégales qu'on voudra ; ensuite on fera enfoncer successivement l'aréomètre (en augmentant ou diminuant son lest) jusqu'à tous les points de division, dans un fluide dont la pesanteur spécifique soit donnée ; & ayant déterminé, par le moyen de la balance ordinaire, les poids absolus & successifs de l'instrument, on trouvera, par la méthode de l'article 183, les volumes correspondans qu'il enfonce dans le fluide. Il est évi-

dent qu'on peut faire enſorte que ces volumes croiſſent ou décroiſſent dans tel rapport qu'on voudra, en prenant les poids dans la raiſon convenable.

Les aréomètres ſont faits ordinairement ou en verre, ou en cuivre, ou en fer blanc, &c. Il convient de faire avec du verre ceux qui ſont deſtinés à être plongés ſouvent dans des liqueurs corroſives.

Paſſons à l'examen particulier de la ſituation qu'un corps ſolide, de figure donnée, poſé librement ſur un fluide, doit ou peut avoir pour ſatisfaire à la fois aux deux conditions d'équilibre dont nous avons parlé (180). Il ne ſera queſtion ici que des corps flottans ou qui ont moins de peſanteur ſpécifique que les fluides où ils ſont plongés; objet utile en pluſieurs occaſions, ſur-tout dans l'Architecture navale. Quant à la ſituation des corps entièrement ſubmergés, elle eſt rarement utile à conſidérer; & d'ailleurs elle peut ſe trouver facilement par les mêmes principes.

PROPOSITION II.

192. *Toute figure plane homogène, diviſée en deux parties égales & ſemblables par ſon axe ſuppoſé vertical, tout ſolide homogène produit par la révolution d'une courbe quelconque autour d'un axe vertical, demeurera en équilibre en flottant dans cette ſituation ſur un fluide.*

Car il eſt clair qu'alors 1°. le poids de la figure ou du ſolide eſt ſoutenu par la pouſſée verticale & contraire du fluide. 2°. Le centre de gravité de la

figure ou du solide, & celui de sa partie enfoncée dans le fluide, sont placés sur une même ligne verticale.

On voit par-là qu'un triangle isocèle, une parabole, un cone droit, un cylindre droit, une sphère, &c, supposés homogènes, demeureront en équilibre sur un fluide, lorsque leurs axes seront verticaux.

REMARQUE.

193. On doit observer que la proposition inverse n'est pas vraie généralement ; c'est-à-dire que si un corps homogène, divisé en parties symétriques par son axe, est en équilibre sur un fluide, il ne s'ensuit pas toujours que son axe est vertical. Car nous verrons tout-à-l'heure que ce même corps peut avoir quelquefois plusieurs autres situations d'équilibre.

PROPOSITION III.

194. *Tout corps prismatique homogène, dont l'axe est horisontal, demeurera en équilibre sur un fluide, lorsque le centre de gravité de la section faite dans son milieu, parallèlement à ses bases, sera dans une même ligne verticale avec celui de la partie de cette section, qui est plongée dans le fluide.*

Car on peut regarder les centres de gravité du prisme & de sa partie plongée dans le fluide, comme réunis dans les deux points dont nous venons de parler. Le prisme est donc alors en équilibre. Ainsi, pour déterminer la situation d'équilibre de ces sortes

de prismes, il suffit de déterminer celle de la section faite dans leur milieu.

PROPOSITION IV. PROBLEME.

195. *Trouver la position que doit prendre le triangle homogène* ESG *flottant sur le fluide* MN, *pour demeurer en équilibre, en supposant qu'il n'y ait qu'un angle* S *d'enfoncé dans le fluide?* Fig. 56

SOLUTION.

Les deux conditions requises pour l'équilibre (180) sont, 1°. que le poids absolu du triangle *ESG* doit être égal au poids absolu du triangle d'eau *MSN*. 2°. Que les centres de gravité *R* & *O* des deux triangles *ESG*, *MSN* doivent être placés dans une même ligne *RO* verticale, & par conséquent perpendiculaire à la surface *MN* du fluide. Voici la manière de les remplir.

Ayant divisé, chacune en deux parties égales aux points *P*, *Q*, les bases *EG*, *MN* des deux triangles *ESG*, *MSN*, soient tirées les droites *SP*, *SQ*, sur lesquelles on prendra les parties $SR = \frac{2}{3} SP$, $SO = \frac{2}{3} SQ$, pour déterminer les centres de gravité *R*, *O* des deux mêmes triangles. Soient menées les droites *RO*, *PQ* qui seront parallèles entr'elles, puisque les côtés du triangle *SPQ* sont coupés proportionnellement en *R* & *O*; & de plus perpendiculaires à *MN*, puisque *RO* doit être verticale. Du point *P* soient

abaissées les perpendiculaires PA, PD sur les côtés SE, SG du triangle ESG prolongés lorsqu'il est nécessaire; & soient tirées les droites PM, PN qui sont évidemment égales entr'elles, à cause de $QM = QN$, & de PQ perpendiculaire sur MN.

Supposons
- SE . . . . $= a$
- SG . . . . $= b$
- SP . . . . $= c$
- le sinus total . . . . $= 1$
- l'angle donné PSE . . . . $= m$
- l'angle aussi donné PSG . . . . $= n$
- SM . . . . $= x$
- SN . . . . $= y$
- la pesanteur spécifique du triangle . $= p$
- la pesanteur spécifique du fluide . . $= \varpi$.

Les deux triangles ESG, MSN qui ont l'angle commun S sont entr'eux comme les produits $SE \times SG$, $SM \times SN$. Ainsi on aura par la première condition de l'équilibre,

$$pab = \varpi xy.$$

Dans le triangle rectangle PAS, on a $PA = PS$. Sin. $PSA = c$ sin. m; $SA = PS$ cos. $PSA = c$ cos. m. On a pareillement dans le triangle rectangle PDS, $PD = c$ sin. n; $SD = c$ cos. n. Donc $AM = c$ cos. $m - x$; $DN = c$ cos. $n - y$; $\overline{PM}^2 = (c \text{ sin. } m)^2 + (c \text{ cos. } m - x)^2$; $\overline{PN}^2 = (c \text{ sin. } n)^2 + (c \text{ cos. } n - y)^2$. Or $\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2$. Ainsi on aura

l'équation $(c \sin. m)^2 + (c \cos. m - x)^2 = (\sin. n)^2 + (c \cos. n - y)^2$, ou simplement

$$xx - 2cx \cos. m = yy - 2cy \cos. n\ ;$$

parce que $(\sin. m)^2 + (\cos. m)^2 = 1$, & $(\sin. n)^2 + (\cos. n)^2 = 1$. Cette équation remplit la seconde condition de l'équilibre.

Il est aisé de trouver les valeurs de x & de y par la construction de deux hyperboles. Mais en employant la voie de l'élimination, & chassant y, on parviendra à l'équation déterminée

$$x^4 - 2cx^3 \cos. m + \frac{2cpabx \cos. n}{\varpi} - \frac{p^2a^2b^2}{\varpi^2} = 0,$$

dont les racines combinées avec l'équation $y = \frac{pab}{\varpi x}$, feront connoître les différentes positions du triangle, qui admettent l'équilibre. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

196. On sçait par la règle de Descartes que dans toute équation dont les racines sont réelles, il y en a autant de positives que les signes + & — s'y trouvent de fois être changés, & autant de négatives qu'il s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes —, qui s'entresuivent. Ainsi, puisque le terme qui devroit contenir x^2 manque dans notre équation, on voit que si toutes ses racines sont réelles, il y en aura nécessairement trois positives & une négative. La racine négative ne peut pas servir, parce qu'on ne suppose pas que MS, soit prolongée au-delà du point S. Mais les racines positives indiqueront

des poſitions réelles d'équilibre, pourvu que l'on ait de plus $x < a$, & $y < b$.

COROLLAIRE II.

197. Suppoſons, pour faire une application ſimple de notre équation générale, que le triangle propoſé *ESG* ſoit iſocèle. On aura $b = a$, $\text{coſ.}\, n = \text{coſ.}\, m$; & l'équation générale deviendra

$$x^4 - 2cx^3 \,\text{coſ.}\, m + \frac{2cpa^2 x \,\text{coſ.}\, m}{\varpi} - \frac{p^2 a^4}{\varpi^2} = 0;$$

d'où l'on tire ces deux équations du ſecond degré,

$$x^2 - \frac{a^2 p}{\varpi} = 0,$$

$$x^2 - 2cx \,\text{coſ.}\, m + \frac{a^2 p}{\varpi} = 0;$$

qu'il faut analyſer ſéparément.

I. La première donne $x = \pm a \sqrt{\left[\frac{p}{\varpi}\right]}$, ou ſimplement $x = a \sqrt{\left[\frac{p}{\varpi}\right]}$, parce que la racine poſitive eſt ſeule utile. Or comme on a toujours $y = \frac{pab}{\varpi x}$, on aura auſſi $y = a \sqrt{\left[\frac{p}{\varpi}\right]}$. Donc $y = x$. Ainſi le triangle *MSN* eſt iſocèle de même que le triangle *ESG*, ou ce qui revient au même, la baſe *EG* du triangle propoſé eſt parallèle à la ſurface du fluide.

II. La ſeconde équation donne $x = c \,\text{coſ.}\, m \pm \sqrt{\left[(c \,\text{coſ.}\, m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}\right]}$. Ainſi à cauſe de $y =$

$\frac{pa^2}{\varpi x}$, on aura

$$y = \frac{pa^2}{\varpi\left(c\,\text{cos}.\,m \pm \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}\right]}\right)} =$$

$c\,\text{cos}.\,m \mp \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2p}{\varpi}\right]}$. Ce second cas donne donc les deux combinaisons suivantes,

$$\left\{\begin{array}{l} x = c\,\text{cos}.\,m + \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2p}{\varpi}\right]} \\ y = c\,\text{cos}.\,m - \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2p}{\varpi}\right]} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = c\,\text{cos}.\,m - \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2p}{\varpi}\right]} \\ y = c\,\text{cos}.\,m + \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2p}{\varpi}\right]} \end{array}\right\}$$

qui indiquent deux nouvelles ſituations d'équilibre, lorſque les valeurs de x & de y ſont réelles, & que de plus on a $x < a$, & $y < a$. Or pour que ces deux conditions ſoient remplies, il faut que l'on ait

1°. $\frac{a^2p}{\varpi} < (c\,\text{cos}.\,m)^2$, ou $\frac{p}{\varpi} < \frac{(c\,\text{cos}.\,m)^2}{a^2}$.

2°. $a > c\,\text{cos}.\,m + \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2p}{\varpi}\right]}$,

ou $\frac{p}{\varpi} > \frac{2ac\,\text{cos}.\,m - aa}{aa}$.

Les limites entre leſquelles eſt renfermée alors la valeur de $\frac{p}{\varpi}$ ſont donc $\frac{(c\,\text{cos}.\,m)^2}{a^2}$ & $\frac{2ac\,\text{cos}.\,m - aa}{aa}$.

Par exemple, lorſque le triangle propoſé eſt équi-

latéral, on a c cos. $m = \frac{3}{4} a$; & ce triangle, outre la première situation d'équilibre, indiquée par la première équation, pourra en avoir encore deux autres, pourvu que l'on ait $\frac{p}{\varpi} < \frac{9}{16}$ & $\frac{p}{\varpi} > \frac{8}{16}$, ou que la valeur de $\frac{p}{\varpi}$ soit comprise entre les deux fractions $\frac{9}{16}$ & $\frac{8}{16}$.

PROPOSITION V. PROBLEME.

Fig. 57. 198. *Trouver la position que doit prendre le triangle homogène* SEG, *flottant sur un fluide* MN, *pour demeurer en équilibre, en supposant que les deux angles* E, G *soient enfoncés dans le fluide?*

SOLUTION.

Il n'y a d'autre changement à faire à la solution du probléme précédent pour l'appliquer à celui-ci, qu'à imaginer que la Figure 56 est renversée de bas en haut; mais pour plus de clarté, je vais résoudre directement & tout au long notre nouveau probléme.

Les trois centres de gravité du triangle *SEG*, du trapèze *MNGE* & du triangle *SMN* sont toujours placés dans une même ligne droite. Or pour qu'il y ait équilibre, il faut que le centre de gravité du triangle proposé *SEG* & celui de sa partie *MNGE* plongée dans le fluide, soient dans une même

ligne verticale. Donc les centres de gravité des deux triangles SEG, SMN sont aussi placés dans une même ligne verticale. Du sommet S, je mène aux milieux des bases EG, MN les droites SP, SQ; & ayant pris $SR = \frac{2}{3} SP$, $SO = \frac{2}{3} SQ$, je tire par les centres de gravité R, O des deux triangles SEG, SMN, la droite RO qui est verticale, ou perpendiculaire à la surface du fluide. Soient joints les points P & Q, par la droite PQ qui est parallèle à RO; & du point P soient menées les droites PM, PN, & les perpendiculaires PA, PD, sur SE, SG respectivement. On aura, comme ci-dessus, $PM = PN$. Cela posé,

Soient
- SE . . . . $= a$
- SG . . . . $= b$
- SP . . . . $= c$
- le sinus total . . . . $= 1$
- l'angle donné PSE . . . . $= m$
- l'angle aussi donné PSG . . . . $= n$
- SM . . . . $= x$
- SN . . . . $= y$
- la pesanteur spécifique du triangle SEG . . . . $= p$
- la pesanteur spécifique du fluide . . . $= \varpi$.

On a $SEG : SMN :: SE \times SG : SM \times SN$, & par conséquent $SEG - SMN$ ou $EMNG : SEG :: SE \times SG - SM \times SN : SE \times SG$. Ainsi le trapèze $EMNG = \frac{SEG \times (SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG}$. Or

la première condition de l'équilibre demande que l'on ait $p \times SEG = \varpi \times EMNG$; on aura donc $p \times SEG = \varpi \times \frac{SEG \times (SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG}$, ou bien,

$$pab = \varpi(ab - xy).$$

On a, comme ci-dessus, $PA = c\,\text{sin.}\,m$, $SA = c\,\text{cos.}\,m$, $PD = c\,\text{sin.}\,n$, $SD = c\,\text{cos.}\,n$, $AM = c\,\text{cos.}\,m - x$, $DN = c\,\text{cos.}\,n - y$, $\overline{PM}^2 = (c\,\text{sin.}\,m)^2 + (c\,\text{cos.}\,m - x)^2$, $\overline{PN}^2 = (c\,\text{sin.}\,n)^2 + (c\,\text{cos.}\,n - y)^2$. Ainsi à cause de $PM = PN$, on aura,

$$xx - 2cx\,\text{cos.}\,m = yy - 2cy\,\text{cos.}\,n.$$

Comparant cette équation avec la précédente, on trouvera

$$x^4 - 2cx^3\,\text{cos.}\,m + \frac{2c(\varpi - p)abx\,\text{cos.}\,n}{\varpi} - \frac{(\varpi - p)^2a^2b^2}{\varpi^2} = 0,$$

équation dont les racines combinées avec l'équation $pab = \varpi(ab - xy)$ donneront les différentes situations d'équilibre du triangle. C. Q. F. T.

On voit assez que la remarque générale de l'article 196 s'applique également ici.

COROLLAIRE.

199. Soit SEG un triangle isocèle. On aura $b = a$, $\text{cos.}\,n = \text{cos.}\,m$; & notre équation deviendra

$$x^4 - 2cx^3\,\text{cos.}\,m + \frac{2c(\varpi - p)a^2x\,\text{cos.}\,m}{\varpi} - \frac{(\varpi - p)^2a^4}{\varpi^2} = 0,$$

d'où

d'où l'on tire ces deux autres équations,

$$x^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi} = 0,$$

$$x^2 - 2cx\,\text{cos}.\,m + \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi} = 0,$$

dont la première donne $x = a\sqrt{\left[\frac{\varpi - p}{\varpi}\right]}$; $y = a\sqrt{\left[\frac{\varpi - p}{p\varpi}\right]}$, & fait voir que le triangle eſt en équilibre lorſque ſa baſe EG eſt horiſontale; la ſeconde donne ces deux combinaiſons,

$$\begin{cases} x = c\,\text{cos}.\,m + \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi}\right]} \\ y = c\,\text{cos}.\,m - \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\,\text{cos}.\,m - \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi}\right]} \\ y = c\,\text{cos}.\,m + \sqrt{\left[(c\,\text{cos}.\,m)^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi}\right]} \end{cases}$$

qui repréſenteront deux nouvelles ſituations d'équilibre, pourvu que l'on ait

1°. $\frac{p}{\varpi} > \frac{a^2 - (c\,\text{cos}.\,m)^2}{a^2}$,

2°. $\frac{p}{\varpi} < \frac{2aa - 2ac\,\text{cos}.\,m.}{a^2}$.

Par exemple, quand le triangle SEG eſt équilatéral, ou qu'on a c coſ. $m = \frac{3}{4}a$, ſi l'on a de plus

$\frac{p}{\varpi} > \frac{7}{16}$ & $\frac{p}{\varpi} < \frac{8}{16}$; ce triangle aura trois situations d'équilibre sur le fluide.

PROPOSITION VI. PROBLEME.

Fig. 58. 200. *Trouver la position que doit prendre le rectangle homogène* BHSK *flottant sur un fluide, pour demeurer en équilibre, en supposant qu'il n'y ait que l'angle* S *d'enfoncé dans le fluide?* (Fig. 58.)

SOLUTION.

Qu'on mène du point S au point Q milieu de MN la droite SQ, & qu'on prenne $SO = \frac{2}{3} SQ$; le point O sera le centre de gravité du triangle MSN. Or comme le centre de gravité du rectangle $BHSK$ est au point d'intersection R des deux diagonales BS, HK, il s'ensuit que si par ce point R & par le point O on tire la droite RO, cette ligne, par les conditions de l'équilibre, sera verticale, ou perpendiculaire à la surface MN du fluide. Soit prise $RP = \frac{SR}{2}$, & soit menée la ligne PQ qui sera évidemment parallèle à RO, & par conséquent perpendiculaire sur le milieu de MN. D'où il suit que les droites PM, PN seront égales. Enfin du point P, soient abaissées les perpendiculaires PA, PD sur SH, SK respectivement.

Soient
- SH . . . . $= a$
- SK . . . . $= b$
- SM . . . . $= x$
- SN . . . . $= y$
- la peſanteur ſpécifique du rectangle $BHSK$ . . . . $= p$
- la peſanteur ſpécifique du fluide . . . $= \varpi$

La première condition de l'équilibre donne l'équation

$$pab = \frac{\varpi \cdot xy}{2}.$$

De plus, puiſque $SP = \frac{3}{4} SB$, on aura $PA = \frac{3}{4} BH = \frac{3}{4} b$, $SA = \frac{3}{4} SH = \frac{3}{4} a$, $PD = \frac{3}{4} BK = \frac{3}{4} a$, $SD = \frac{3}{4} SK = \frac{3}{4} b$. Donc $\overline{PM}^2 = \frac{9b^2}{16} + \left(\frac{3}{4} a - x\right)^2$, $\overline{PN}^2 = \frac{9a^2}{16} + \left(\frac{3}{4} b - y\right)^2$. Ainſi à cauſe de $PM = PN$, on aura

$$xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}.$$

Comparant cette équation avec la précédente, & & éliminant y, on aura l'équation déterminée

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pab^2x}{\varpi} - \frac{4p^2a^2b^2}{\varpi^2} = 0,$$

par le moyen de laquelle on trouvera les différentes ſituations d'équilibre du rectangle propoſé. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

201. Soit le rectangle proposé un quarré. On aura $b = a$; notre équation devient

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pa^3x}{\varpi} - \frac{4p^2a^4}{\varpi^2} = 0,$$

& se décompose en ces deux autres équations,

$$x^2 - \frac{2pa^2}{\varpi} = 0,$$

$$x^2 - \frac{3ax}{2} + \frac{2pa^2}{\varpi} = 0.$$

La première donne $x = a\sqrt{\left[\frac{2p}{\varpi}\right]}$, $y = a\sqrt{\left[\frac{2p}{\varpi}\right]}$; d'où l'on voit que le quarré est en équilibre, lorsque sa diagonale HK est horisontale, ce qui est évident par soi-même. La seconde donne $x = \frac{a\left[3 \pm \sqrt{\frac{(9\varpi - 32p)}{\varpi}}\right]}{4}$, $y = \frac{a\left[3 \mp \sqrt{\frac{(9\varpi - 32p)}{\varpi}}\right]}{4}$; d'où résultent deux nouvelles situations d'équilibre, lorsqu'on a $\frac{p}{\varpi} < \frac{9}{32}$ & $\frac{p}{\varpi} > \frac{8}{32}$.

REMARQUE.

202. On trouve par la même méthode la position d'équilibre d'un rectangle dont trois angles se-

roient submergés. Car on n'a pour cela qu'à imaginer que la Figure 58 est renversée de bas en haut, que les trois angles B, H, K sont submergés, & que le triangle MSN est la partie du rectangle, saillante au-dessus de la surface MN du fluide. Ainsi en conservant les mêmes dénominations, on aura évidemment ces deux équations,

$$pab = \varpi\left(ab - \frac{xy}{2}\right),$$

$$xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2},$$

qui résolvent le nouveau problême.

PROPOSITION VII. PROBLEME.

203. *Trouver la position que doit prendre le rectangle homogène* BHSK *flottant sur un fluide, pour demeurer en équilibre, en supposant que les deux angles* H *&* S *soient plongés dans le fluide?* (Fig. 59.) Fig. 59.

SOLUTION.

Soient prolongées les droites SH, NM jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en Z; par le point Z & le milieu L de SN soit menée la droite ZL qui passera nécessairement par les centres de gravité du triangle ZSN, du triangle ZHM & du trapèze $MHSN$. Soient G le centre de gravité du triangle ZSN, F celui du triangle ZHM; & soient menées parallèlement à SN, à HM, les droites GT, FK; & perpendiculairement à ZN, les droites GV, FI. Comme il faut, pour l'équilibre, que le centre de

gravité du rectangle $BHSK$ & celui du trapèze $MHSN$ soient placés dans une même ligne verticale, il s'ensuit que si par le point R, milieu de la diagonale HK & centre de gravité du rectangle $BHSK$, on tire la droite RO perpendiculaire à la surface MN du fluide, le centre de gravité du trapèze $MHSN$ sera placé sur cette ligne.

Soient:
- SH . . . . $= a$
- SK . . . . $= b$
- HM . . . . $= x$
- SN . . . . $= y$
- ZN . . . . $= z$
- la pesanteur spécifique du rectangle $BHSK$ . . . . $= p$
- la pesanteur spécifique du fluide . . . . $= \varpi$.

Il est clair que le trapèze $MHSN = \frac{a(x+y)}{2}$, & que la première condition de l'équilibre donne l'équation

$$pab = \frac{\varpi(x+y)a}{2}.$$

Ayant mené par le point Z l'axe vertical ZY, & considérant les momens des triangles ZSN, ZHM, & du trapèze $MHSN$ par rapport à cet axe, on aura, par les principes de la Statique, $MHSN \times ZO = ZSN \times ZV - ZHM \times ZI$. Or à cause des triangles semblables ZSN, ZHM, on trouve $ZS = \frac{ay}{y-x}$, $ZH = \frac{ax}{y-x}$; & par

conséquent $ZSN = \frac{ay^2}{2(y-x)}$, $ZHM = \frac{ax^2}{2(y-x)}$. De plus on a $ZM = ZN \times \frac{HM}{SN} = \frac{zx}{y}$; & les propriétés des centres de gravité donnent $ZT = \frac{2}{3} ZN = \frac{2z}{3}$, $ZK = \frac{2}{3} ZM = \frac{2zx}{3y}$, $GT = \frac{1}{3} NS = \frac{y}{3}$, $FK = \frac{1}{3} MH = \frac{x}{3}$. Ainsi à cause des trois triangles semblables ZSN, GVT, FIK, on aura $VT = \frac{GT \times SN}{ZN} = \frac{yy}{3z}$, $IK = \frac{FK \times SN}{ZN} = \frac{xy}{3z}$. Donc $ZV = ZT - VT = \frac{2zz - yy}{3z}$, $ZI = ZK - IK = \frac{(2zz - yy)x}{3yz}$. Substituant toutes ces valeurs dans l'équation $MHSN \times ZO = ZSN \times ZV - ZHM \times ZI$, on trouvera

$$\frac{a(x+y)}{2} \times ZO = \frac{(2zz - yy)a(y^3 - x^3)}{6yz(y-x)} = \frac{(2zz - yy)a(yy + xy + xx)}{6yz},$$

en divisant le numérateur & le dénominateur du second membre par $y - x$.

Qu'on mène par le point R la droite RX parallèle à MH ou à SN, & qu'on prolonge OR jusqu'en E. Puisque le point R est le milieu de HK, on aura $RX = \frac{SK}{2} = \frac{b}{2}$, $HX = \frac{HS}{2} = \frac{a}{2}$. Les deux triangles semblables ZSN, RXE donnent

$XE = \frac{SN \times RX}{ZS} = \frac{b(y-x)}{2a}$. Donc $ZE = ZH + HX + XE = \frac{ax}{y-x} + \frac{a}{2} + \frac{b(y-x)}{2a} = \frac{a(y+x)}{2.(y-x)} + \frac{b(y-x)}{2a}$, & à cauſe des deux triangles ſemblables ZSN, ZOE, $ZO = \frac{ZE \times ZS}{ZN} = \frac{a^2 y(y+x)}{2z(y-x)^2} + \frac{by}{2z}$. D'où réſulte $MHSN \times ZO = \frac{a^3 y(y+x)^2}{4z(y-x)^2} + \frac{aby(y+x)}{4z}$. Comparant cette ſeconde valeur de $MHSN \times ZO$ avec la première, & obſervant que $zz = yy + \frac{a^2 y^2}{(y-x)^2}$, on parviendra, toutes réductions faites, à l'équation

$$2y^4 + 2x^4 - 2xy^3 - 2yx^3 - 2a^2xy + a^2y^2 + a^2x^2 - 3by^3 + 3bxy^2 + 3byx^2 - 3bx^3 = 0,$$

laquelle ſe décompoſe en ces deux autres,

$$yy - 2xy + xx = 0,$$

$$2yy + 2xy + 2x^2 + a^2 - 3by - 3bx = 0.$$

Voyons les conſéquences particulières qui en réſultent.

I. La première donne $y - x = 0$, ou $y = x$. D'où il ſuit que le rectangle demeurera en équilibre, lorſque le côté qui eſt plongé dans le fluide ſera horiſontal ; ce qui eſt évident par ſoi-même & s'applique également à chacun des quatre côtés du rectangle.

II. Si l'on ſubſtitue dans la ſeconde pour y ſa valeur $\frac{2pb - \varpi x}{\varpi}$, on trouvera

$$x^2 - \frac{2pbx}{\varpi} + \frac{4p^2b^2}{\varpi^2} - \frac{3pb^2}{\varpi} + \frac{a^2}{2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{pb \pm \sqrt{\left[3b^2(\varpi p - p^2) - \frac{a^2\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi},$$

& par conséquent

$$y = \frac{pb \mp \sqrt{\left[3b^2(\varpi p - p^2) - \frac{a^2\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi}.$$

Ainsi le rectangle proposé pourra avoir deux nouvelles situations d'équilibre, pourvû que, 1°. les valeurs de x & de y soient réelles; 2°. qu'elles soient positives; 3°. que chacune d'elles soit moindre que b. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

204. Supposons que le rectangle proposé devienne un quarré, ou que l'on ait $b = a$. Ce quarré est d'abord en équilibre, lorsque son côté qui est plongé dans le fluide est horisontal. De plus on a ces équations

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{ap + a\sqrt{\left[3(\varpi p - p^2) - \frac{\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi} \\ y &= \frac{ap - a\sqrt{\left[3(\varpi p - p^2) - \frac{\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi} \end{aligned} \right\}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ap - a\sqrt{\left[3(\varpi p - p^2) - \frac{\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi} \\ y = \dfrac{ap + a\sqrt{\left[3(\varpi p - p^2) - \frac{\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi} \end{array}\right\}$$

d'où ſuivent deux nouvelles ſituations d'équilibre, lorſque la fraction $\frac{p}{\varpi}$ ſera compriſe entre $\frac{3}{4}$ & $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

PROPOSITION VIII. PROBLEME.

Fig. 60. 205. *Trouver la poſition que doit prendre la parabole homogène* ABC *flottante ſur un fluide, pour demeurer en équilibre, en ſuppoſant que ſa partie* FMN *ſoit ſeule plongée, & que les points* B, C *ſoient hors du fluide?* (Fig. 60.)

SOLUTION.

Il eſt d'abord évident que la parabole *ABC*, ſuppoſée moins peſante ſpécifiquement que le fluide, eſt en équilibre lorſque ſon axe eſt vertical. Mais il s'agit ici de ſçavoir en général ſi elle ne peut pas encore être en équilibre, quand ſon axe eſt incliné.

Soient *AD* l'axe de la courbe, *BD* ou *DC* ſa dernière ordonnée. Ayant tiré par le point *H* milieu de *MN*, & parallèlement à *DA*, le diamètre *HF*, je mène du point *F* l'ordonnée *FG*, la droite *FX*

au foyer X, & la tangente FT qui rencontre en T l'axe DA prolongé, & qui, par la propriété de la parabole, est parallèle à MN. Du point M, j'abaisse MY perpendiculaire sur FH prolongée. Je joins les centres de gravité K & I de la parabole ABC & de sa partie FMN, par la droite KI qui, en vertu de l'équilibre, doit être verticale, ou perpendiculaire à MN.

Soient
- AD . . . . $= a$
- BD . . . . $= b$
- le paramètre de l'axe $AD = \frac{bb}{a}$ . . . $= c$
- FH . . . . $= x$
- MH . . . . $= y$
- FG . . . . $= z$
- la pesanteur spécifique de la parabole ABC . . . . $= p$
- la pesanteur spécifique du fluide . . . . $= \varpi$.

On aura, par la propriété de la parabole, $AK = \frac{3}{5} AD = \frac{3}{5} a$; $FI = \frac{3}{5} FH = \frac{3}{5} x$; $GT = 2GA = \frac{2z^2}{c}$; $FT = \frac{z\sqrt{[cc+4zz]}}{c}$.

Les deux triangles semblables FGT, MYH donnent $FT : FG :: MH : MY = \frac{cy}{\sqrt{[cc+4zz]}}$. Or l'aire parabolique $ABC = \frac{4}{3} BD \times DA$, & l'aire $FMN = \frac{4}{3} MY \times FH$. Ainsi on aura, par la pre-

mière condition de l'équilibre,

$$pab = \frac{\varpi cyx}{\sqrt{[cc+4zz]}}.$$

Comme la seconde condition de l'équilibre est évidemment remplie, lorsque l'axe de la parabole est vertical, & que par conséquent $z = 0$, on voit par l'équation précédente, que dans ce cas particulier, on a $pab = \varpi yx = \varpi x\sqrt{cx}$, en observant qu'alors $y = \sqrt{cx}$. D'où résulte $x = a \sqrt[3]{\left[\frac{p^2}{\varpi^2}\right]}$. Mais revenons au problême général où le point F ne tombe pas sur le point A.

La propriété de la parabole donne $FX = \frac{cc+4zz}{4c}$; $yy = x \times 4FX = \frac{x(cc+4zz)}{c}$, & $y = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{[cc+4zz]}}{\sqrt{c}}$. Substituant cette valeur de y dans l'équation générale $pab = \frac{\varpi cyx}{\sqrt{[cc+4zz]}}$; on trouvera

$$x = a\sqrt[3]{\left[\frac{p^2}{\varpi^2}\right]}.$$

D'où l'on voit que la valeur de x est toujours la même, quelle que puisse être la position de la parabole sur le fluide.

La droite KI étant perpendiculaire à MN, les deux triangles FGT, ILH sont semblables & donnent $FT : GT :: IH : HL = \frac{4xz}{5\sqrt{[cc+4zz]}}$.

Donc $LO = HO - HL = FT - HL = \frac{z\sqrt{[cc+4zz]}}{c} - \frac{4xz}{5\sqrt{[cc+4zz]}}$. Les deux triangles semblables FGT, KLO donnent $GT:FT::LO:OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$. Mais d'un autre côté, on a $OK = KA - OA = KA - (OT - AT) = \frac{3}{5}a - x + \frac{z^2}{c}$. Egalant entr'elles les deux valeurs de OK & réduisant, on trouvera

$$zz = \frac{6ac - 5cc - 6cx}{10},$$

ou bien, en mettant pour x sa valeur trouvée ci-dessus,

$$zz = \frac{6ac - 5cc}{10} - \frac{6ac}{10}\sqrt[3]{\left[\frac{p^2}{\varpi^2}\right]}.$$

Ce qui donne deux nouvelles situations d'équilibre, pourvû que l'on ait $6a > 5c + 6a\sqrt[3]{\left[\frac{p^2}{\varpi^2}\right]}$, ou $\frac{p}{\varpi} < \left(\frac{6a-5c}{6a}\right)^{\frac{3}{2}}$ quantité supposée réelle & positive. C. Q. F. T.

PROPOSITION IX. PROBLEME.

206. *On suppose maintenant que la parabole* ABC *n'ait pas le même centre de gravité que de figure, soit parce qu'elle n'est pas homogène dans toute son étendue, soit parce qu'elle est chargée de quelque corps étranger placé ailleurs qu'à son centre de figure, & lié solidement avec elle : il s'agit de trouver la posi-* Fig. 60.

tion qu'elle doit prendre pour être en équilibre sur le fluide MN ?

SOLUTION.

Soit le point K' le centre de gravité du systême de tous les poids dont la parabole ABC est chargée, & qui font équilibre à la poussée verticale & contraire du fluide. Ce point K' étant donné de position, si l'on mène la droite $K'V$ perpendiculaire à l'axe AD de la parabole, cette ligne & la partie correspondante AV de l'axe seront données. Soit FMN l'espace parabolique, plongé dans le fluide. Par le centre de gravité I de cet espace considéré comme homogène, & par le point K', je mène la droite IK' qui doit être nécessairement verticale à cause de l'équilibre, & qui va rencontrer en K l'axe AD. J'achève la construction comme dans l'article précédent, & je garde les mêmes dénominations, en faisant de plus $K'V = k$, $AV = h$; & observant que par p on doit entendre ici la pesanteur spécifique d'un corps de même poids que la parabole ABC, & dont le volume seroit l'aire ABC supposée homogène. On trouvera, comme tout-à-l'heure, l'équation, $pab = \frac{\varpi cyx}{\sqrt{[cc + 4zz]}}$, qui remplit la première condition de l'équilibre. Ensuite on trouvera $x = a\sqrt[3]{\left[\frac{p^2}{\varpi^2}\right]}$.

Les trois triangles semblables FGT, ILH, KLO, donnent, comme ci-dessus, $OK = \frac{cc + 4zz}{2c}$ —

$\frac{2x}{5}$; & les deux triangles ſemblables FGT, KVK' donnent $GT : FG :: VK' : VK = \frac{ck}{2z}$. Donc $OV = OK - VK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5} - \frac{ck}{2z}$. Mais d'un autre côté, $OV = VT - OT = AV + AT - HF = h + \frac{z^2}{c} - x$. Egalant entr'elles les deux valeurs de OV, on trouvera $10z^3 - (10ch - 6cx - 5c^2)z - 5c^2k = 0$, équation dont les racines (après avoir mis pour x ſa valeur trouvée ci-deſſus) feront connoître les poſitions d'équilibre de la parabole. C. Q. F. T.

En faiſant $k = 0$, $h = \frac{3}{5}a$, on retombe dans la ſolution précédente, comme cela doit être.

Je ne multiplierai pas davantage ces applications. On procédera d'une manière analogue dans les autres cas, ſoit que les corps flottans ſoient homogènes ou non.

SECTION II.

Loix de la ſtabilité des corps flottans.

207. Nous avons vu qu'un corps flottant ſur un fluide eſt en équilibre, lorſque ſon poids eſt égal à celui du fluide qu'il déplace en s'y enfonçant, & que

de plus les centres de gravité de ces deux poids sont situés dans une même ligne verticale. Or la première condition ne faisant que limiter la grandeur & non pas la figure du volume fluide déplacé, il est clair que si l'on se propose simplement de mettre un corps en équilibre sur un fluide, on y parviendra en disposant ce corps de manière qu'il enfonce une partie de grandeur donnée, & qui satisfasse à la seconde condition, sans s'embarrasser d'ailleurs de la distance des deux centres de gravité, ni de leur position respective sur la même ligne verticale. Mais dans la pratique le problême demande une autre considération. Comme il existe toujours des causes, telles que le mouvement de l'air, les agitations intérieures auxquelles le fluide peut être sujet, &c, qui tendent à troubler l'équilibre, il faut que cet état ait une certaine consistance ou *stabilité*; ensorte que s'il vient à être dérangé, il puisse se rétablir en vertu de la pesanteur du corps & de la poussée verticale du fluide. Or, relativement à cette stabilité, la distance & la position respective des deux centres de gravité, ne sont pas des choses indifférentes, comme on le verra ci-dessous. Rappellons-nous d'abord ici quelques propositions de Méchanique dont nous ferons usage.

Fig. 61. 208. Soit *CABDE* (Fig. 61) un corps de figure quelconque, qui oscille librement autour du point ou axe fixe *C*, en vertu de sa seule pesanteur. Ayant mené par le point *C* la verticale *CN* & la droite *CG* au centre de gravité *G* du corps, je

je suppose que le poids absolu de ce corps soit représenté par la verticale GL, & je décompose cette force en deux autres GK, GF, la première, dirigée suivant CG, & par conséquent anéantie par la résistance du point C; la seconde, perpendiculaire à CG, la seule qui produise le mouvement de rotation du corps autour de l'axe C. Or en nommant P le poids du corps, 1 le sinus total, il est clair qu'on a, force $GF = P \times$ sin. GCN, & que le moment de cette force, par rapport à l'axe C, est $P \times CG \times$ sin. GCN. Soit mn l'arc décrit dans un instant, autour de l'axe C, par une particule quelconque m du corps proposé; QR un arc semblable à mn, & décrit avec le raïon constant & donné CQ. Le moment de la quantité de mouvement imprimé à la molécule m autour de l'axe C est exprimé par $m \times mn \times Cm$, ou par $m \times \overline{Cm}^2 \times \frac{QR}{CQ}$, à cause de $mn = Cm \times \frac{QR}{CQ}$. Or il y a autant de ces momens particuliers qu'il y a de molécules m dans la masse entière du corps; & comme la valeur de la fraction $\frac{QR}{CQ}$ est évidemment la même pour toutes les molécules, on voit que si l'on multiplie chaque molécule par le quarré de sa distance à l'axe C, qu'ensuite ayant ajouté ensemble tous ces produits, on nomme S leur somme; on voit, dis-je, que le moment du mouvement de rotation de la masse entière, est exprimé par $S \times \frac{QR}{CQ}$. Egalant ce mo-

ment à celui de la force GF qui le produit, on aura $P \times CG \times$ sin. $GCN = S \times \frac{QR}{CQ}$; & $\frac{QR}{CQ} = \frac{P \times CG \times \text{sin. } GCN}{S}$.

Fig. 62. 209. En supposant de même (Fig. 62) un second corps qui oscille autour de l'axe c, & désignant par p, cg, gcn, s, qr, cq, les quantités analogues à P, CG, GCN, S, QR, CQ, on aura $\frac{qr}{cq} = \frac{p \times cg \times \text{sin } gcn}{s}$. Donc,

1°. Si l'on a $gcn = GCN$, $cq = CQ$, $\frac{P \times CG}{S} = \frac{p \times cg}{s}$, on aura $qr = QR$. D'où l'on voit que les deux corps décriront, dans des instans égaux, des espaces égaux, & arriveront par conséquent à la verticale dans des temps égaux, quelle que soit la grandeur de l'angle initial GCN ou gcn.

2°. Si de plus le poids p est assez petit pour que tous ses points puissent être censés réunis à son centre de gravité g; ce poids devient un pendule simple ordinaire, & on a $s = p \times \overline{cg}^2$. Ainsi l'équation $\frac{P \times CG}{S} = \frac{p \times cg}{s}$ donne alors $\frac{P \times CG}{S} = \frac{p \times cg}{p \times \overline{cg}^2}$; & par conséquent $cg = \frac{S}{P \times CG}$, expression de la longueur d'un pendule simple (Fig. 62) qui fait ses oscillations dans le même temps que le pendule composé de la Fig. 61.

210. Supposons que le pendule simple p (Fig 62) décrive de petits arcs, ensorte que l'arc total gt compris depuis le point de départ du pendule jusqu'à la verticale ct, puisse être censé se confondre avec l'ordonnée gn. Comme on a toujours $\frac{qr}{cq} = \frac{p \times cg \times \text{sin.}\, gcn}{s}$, & qu'ici $s = p \times \overline{cg}^2$, $\text{sin.}\, gcn = \frac{gn}{cg} = \frac{gt}{cg}$, $\frac{qr}{cq} = \frac{gx}{cg}$; on aura $\frac{p \times gt}{cg} = p \times gx$. Pareillement si au lieu de supposer que le pendule parte du point g, on suppose qu'il parte de tout autre point y (toujours fort proche de la verticale ct), & qu'il décrive dans un instant l'arc yz, on aura $\frac{p \times yt}{cg} = p \times yz$. Donc $\frac{p \times gt}{cg} : \frac{p \times yt}{cg} :: p \times gx : p \times yz :: gx : yz$. Or $\frac{p \times gt}{cg}$ & $\frac{p \times yt}{cg}$ sont évidemment les expressions des forces qui font parcourir à la même masse p les espaces gx, yz. Ainsi puisque ces forces sont proportionnelles aux espaces gx, yz, il s'ensuit que ces espaces sont parcourus en des instans égaux. Il en est de même pour tous les autres élémens correspondans des arcs totaux que le pendule décrit. Par conséquent les oscillations du même pendule sont *isochrones* entr'elles, ou se font en temps égaux, quels que soient les arcs décrits par ce même pendule, pourvu qu'ils soient toujours très-petits.

211. Soit maintenant (Fig. 63) un corps quelconque, parfaitement libre & poussé par une force F Fig. 63.

dont la direction ne paſſe pas par ſon centre de gravité G. N'ayons d'abord aucun égard à la peſanteur. Par le centre G de maſſe (qui eſt placé au même point que ſeroit le centre de gravité, ſi les molécules du corps étoient ſoumiſes à l'action de la peſanteur), & par la direction FH de la force F ſoit mené le plan $ABDE$ qui partage le corps en deux parties; & ſoient tirées du point G la droite GH perpendiculaire à la direction de la puiſſance F, & la droite GO perpendiculaire au plan $ABDE$. J'ai démontré dans mes Elémens de Dynamique (Art. LXXX),

1°. Que le centre de gravité du corps eſt mû de la même manière que s'il ſe trouvoit ſur la direction de la force F, quelle que ſoit la figure du corps.

2°. Que ſi le corps eſt diviſé en deux parties parfaitement égales & ſemblables par le plan $ABDE$, il tourne autour de l'axe GO de la même manière que ſi le centre de gravité étoit fixe. Voy. l'Ouvrage cité.

Lorſque les deux parties dans leſquelles le plan $ABDE$ diviſe le corps propoſé, ne ſont pas égales & ſemblables, le mouvement de rotation ne ſe fait pas ſimplement autour de l'axe GO; le corps oſcille en différens ſens autour de ſon centre de gravité. Je déterminerai en général, dans les notes, les oſcillations des corps flottans. Ici je ſuppoſe que le plan $ABDE$ diviſe le corps en deux parties égales & ſemblables, du moins ſenſiblement; & je ne conſidère que les oſcillations qui ſe font autour de l'axe

GO supposé immobile & passant toujours par les mêmes points du corps.

212. Du point G, avec le raïon donné GQ, soit décrit l'arc QR mesure de l'angle de rotation du corps autour de l'axe GO. Nommons P la masse de ce corps, V la vîtesse de son centre de gravité parallèlement à FH; S la somme des produits des particules du corps par les quarrés de leurs distances à l'axe GO. Il est évident, par la proposition citée, & par l'article 208, qu'on aura ces deux équations, $V = \frac{F}{P}$, $F \times GH = S \times \frac{QR}{GQ}$, dont l'une représente le mouvement de translation du centre de gravité; l'autre, le mouvement de rotation autour de l'axe GO.

213. Que tout étant d'ailleurs le même que dans les deux articles précédens, le corps proposé soit soumis à l'action de la pesanteur; que la direction FH de la force F soit verticale; & que par conséquent le plan $ABDE$ soit vertical, & l'axe GO horisontal. Au lieu de l'équation $V = \frac{F}{P}$, nous aurons $V = \frac{F - P}{P}$, expression dans laquelle P est le poids du corps, & la force F est supposée dirigée de bas en haut. Quant à la seconde équation $F \times GH = S \times \frac{QR}{GQ}$, elle est toujours la même; car il est clair que la force P passant par le centre de gravité G, ne peut imprimer aucun mouvement de rotation au corps autour de ce point.

214. L'application de ces principes à notre ſujet ſe préſente d'elle-même. La force F peut nous exprimer ici la pouſſée verticale du fluide qui tend à ſoulever le corps flottant, tandis que ſon poids P tend à le faire deſcendre. On voit par l'équation $V = \frac{F - P}{P}$, que le corps n'eſt immobile dans le ſens vertical, que lorſqu'on a $V = o$, ou $P = F$. La ſeconde équation $F \times GH = S \times \frac{QR}{GQ}$ ou $\frac{QR}{GQ} = \frac{F \times GH}{S}$ fait voir que ſi le centre de gravité du corps & celui de ſa partie plongée dans le fluide, conſidérée comme homogène, ne ſont pas ſitués dans une même ligne verticale, le corps a, autour de l'axe horiſontal GO, un mouvement de rotation d'autant plus grand, en un temps donné, que la fraction $\frac{QR}{GQ}$ ou ſa valeur $\frac{F \times GH}{S}$ eſt plus grande. Or ce mouvement peut tendre à approcher ou à éloigner de la verticale qui paſſe par le centre de gravité du corps, le centre de gravité de la partie ſubmergée. Dans le premier cas, le corps a de la ſtabilité; & il en a d'autant plus, que le moment $F \times GH$ de la pouſſée verticale du fluide par rapport à l'axe GO, eſt plus grand, la quantité S étant donnée. Dans le ſecond, le corps manque de ſtabilité, & tend à verſer avec d'autant plus de vîteſſe, que la quantité $F \times GH$ eſt plus grande. Développons cette théorie générale avec quelque détail, en l'appliquant à des exemples.

PROPOSITION I. PROBLEME.

215. *Déterminer les conditions de la stabilité d'une figure plane* ABK (Fig. 64.) *flottante sur un fluide MN?* Fig. 64.

Il peut arriver ou que le centre de gravité de la figure entière soit placé plus bas que celui de sa partie submergée *MNK* considérée comme homogène, soit parce que la figure *ABK* n'est pas homogène, soit parce qu'elle est chargée de quelque corps étranger placé vers son fond; ou bien que le premier centre de gravité soit placé plus haut que le second. Examinons séparément les deux cas, pour plus de clarté.

SOLUTION *du premier cas.*

216. Soient le point *G* le centre de gravité de la figure proposée *ABK*, le point *F* celui de sa partie submergée *MNK* considérée comme homogène. Ces deux centres sont placés sur une même ligne verticale *GZ*, tant que l'équilibre subsiste. Mais supposons que par quelque cause extérieure, la figure *ABK* s'incline un peu du côté de *B*, ou qu'un point quelconque *Z* de la verticale *GZ* décrive l'arc très-petit *ZQ*, ensorte cependant que la nouvelle partie submergée *mnK* soit égale à la première *MNK*; qu'ensuite la figure soit abandonnée uniquement à l'action de la pesanteur & de la poussée verticale du fluide. On voit d'abord qu'à cause

de $mnK = MNK$, le centre de gravité G de la figure ne monte, ni descend, puisqu'il n'y a aucune force qui tende à le déranger. La partie $NVmK$ étant commune aux deux surfaces mnK, MNK, les deux triangles NVn, MVm sont égaux. Donc en menant les hauteurs nf, mh de ces triangles, on aura $NV \times nf = MV \times mh$. Or $nf : mh :: Vf : Vh$; & comme l'inclinaison de la figure est supposée très-petite, on a sensiblement $Vf = VN$, & $Vh = VM$. Donc $nf : mh :: VN : VM$, & $nf = \frac{mh \times VN}{VM}$. Ainsi $NV \times nf$ ou $MV \times mh = \frac{\overline{VN}^2 \times mh}{MV}$; ce qui donne $MV = NV$, & fait voir que le point V où se coupent les deux lignes de flottaison MN, mn, est le milieu de MN.

Ayant mené par le point I, centre de gravité de la partie mnK, la droite Ig perpendiculaire à la surface actuelle mn du fluide, & qui rencontre en g la verticale GZ, il est clair que comme le point g est placé au-dessus du centre de gravité G de la figure, la poussée verticale du fluide, qui agit de bas en haut, du côté vers lequel l'inclinaison s'est faite, tend à relever la figure & à la rétablir dans sa première position. Cette même figure a donc de la stabilité. Reste à en trouver la mesure, ou le moment de la poussée verticale actuelle du fluide, par rapport au centre de gravité G, qui est le point sur lequel se fait la rotation.

Soit menée du centre de gravité G la perpendi-

culaire GE sur la direction Ig de la pouffée verticale du fluide. Ensuite par le point G, le point F, centre de gravité de la partie MNK, & les centres de gravité des deux triangles NVn, MVm, soient menées les droites Gi, Fd, yx, zu, parallèles à Eg. Le moment de mnK, par rapport au centre de gravité G, est exprimé par $mnK \times GE$. Ce moment est égal à celui de la quantité $(MNK + NVn - MVm)$, par rapport au même point. Or en représentant la poussée verticale du fluide par mnK, ou par $(MNK + NVn - MVm)$, on voit que MNK, NVm représentent deux forces dirigées de bas en haut, tandis que la troisième MVm est dirigée de haut en bas. Donc les momens particuliers des trois forces MNK, NVn, MVm sont conspirans, & tendent à faire tourner la figure dans le même sens AKB pour la ramener à sa première situation. Cela posé, le moment de $MNK = MNK \times GD$; le moment de $NVn = NVn \times xi = \frac{NV \times nf}{2} \times xi$; le moment de $MVm = MVm \times zi = \frac{NV \times nf}{2} \times zi$. Donc $mnK \times GE = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times xi + \frac{NV \times nf}{2} \times zi = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times (xi + iz) = MNK \times GD + \frac{MN \times nf}{4} \times (mn - \frac{1}{3} mn)$, quantité qui, à cause de $mn = MN$ sensiblement, devient $MNK \times GD$

$+ \frac{\overline{MN}^2 \times nf}{6}$. L'arc QZ qui meſure l'angle d'inclinaiſon de la figure, étant ſuppoſé décrit avec le raïon donné GQ, on a $GD = FG \times \frac{QZ}{GQ}$, $nf = NV \times \frac{QZ}{GQ} = \frac{MN}{2} \times \frac{QZ}{GQ}$. Donc $mnK \times GE = \left(MNK \times FG + \frac{\overline{MN}^3}{12}\right) \times \frac{QZ}{GQ}$, expreſſion de la ſtabilité de la figure propoſée. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

217. On voit par-là que dans ce premier cas la figure propoſée a toujours de la ſtabilité ; & que toutes choſes égales d'ailleurs, elle en a d'autant plus, que ſon centre de gravité eſt placé plus bas, par rapport à celui de ſa partie ſubmergée, ou que la diſtance FG de ces deux centres eſt plus grande.

COROLLAIRE II.

218. Suppoſons que la figure partant de la poſition bKa pour revenir à la première BKA, le point Q décrive autour du centre de gravité G le petit arc QR en un inſtant; & nommons S la ſomme des produits des particules de la figure entière ABK par les quarrés de leurs diſtances au point G. On aura (213), $\left(MNK \times FG + \frac{\overline{MN}^3}{12}\right) \times \frac{QZ}{GQ} =$

$S \times \frac{QR}{GQ}$, ou $QR = QZ \times \left(\frac{12 MNK \times FG + \overline{MN}^3}{12 S}\right)$.

Or dans cette équation le ſecond facteur du ſecond membre étant une quantité toujours conſtante, quelque ſoit l'arc QZ toujours ſuppoſé fort petit, la figure oſcille à la manière des pendules. Car ſoit (Fig. 62) un pendule ſimple p qui oſcille autour du point c : l'équation qui exprime le mouvement de ce pendule, eſt (210) $p \times gx = \frac{p \times gt}{cg}$ ou $gx = \frac{gt}{cg}$, & devient la précédente, en prenant les lignes QR, QZ (Fig. 64) égales reſpectivement aux lignes gx, gt (Fig. 62); & faiſant $\frac{1}{cg} = \frac{12 MNK \times FG + \overline{MN}^3}{12 S}$. La longueur cg du pendule ſimple qui fait ſes oſcillations dans le même temps que la figure propoſée ABK eſt donc exprimée par $\frac{12 S}{12 MNK \times FG + \overline{MN}^3}$.

Il en eſt d'un vaiſſeau flottant à la mer, comme de la figure propoſée. S'il vient à être un peu dérangé de la ſituation d'équilibre, ſoit par le choc des lames, ou par quelque bouffée de vent, & qu'enſuite il ſoit abandonné à l'action de ſa peſanteur, & de la pouſſée verticale du fluide, il fait dans le ſens de ſa longueur ou de ſa largeur, des oſcillations *iſochrones* entr'elles, c'eſt-à-dire de même durée, dans chaque eſpèce. Ces oſcillations s'appellent mou-

vemens de *tangage* ou de *roulis*, ſuivant qu'elles ſont longitudinales ou latitudinales.

SOLUTION *du ſecond cas.*

219. Je ſuppoſe que tout ſoit le même que dans la ſolution du cas précédent, à cela près que le centre de gravité de la figure propoſée ABK, au lieu d'être placé en G, ſe trouve maintenant en G', au-deſſus du centre de gravité F de la partie MNK primitivement ſubmergée. Par le point G', ſoit menée la droite $E'G'D'$ perpendiculaire aux deux parallèles Fd, Ig, dont l'une paſſe par le centre de gravité F de la partie MNK primitivement ſubmergée, l'autre paſſe par le point I de la partie mnK maintenant ſubmergée, & qui ſont perpendiculaires à la ſurface actuelle mn du fluide. Il eſt clair que ſi l'on repréſente la pouſſée verticale du fluide par l'aire mnK ou MNK, le moment de cette force eſt maintenant $mnK \times G'E'$. Prenant à la place de ce moment celui de la force ($MNK + NVn - MVm$) compoſée des trois forces MNK, NVn, MVm, on verra que la force exprimée par MNK, & dirigée ſuivant Fd tend à faire tourner la figure dans le ſens BKA, & par conſéquent à augmenter ſon inclinaiſon, tandis qu'au contraire les deux autres forces NVn, MVm tendent, comme dans le cas précédent, à faire tourner la figure dans le ſens AKB, & par conſéquent à la rétablir dans la ſituation d'équilibre. Ainſi en achevant le reſte de la ſolution comme dans le cas

précédent, on trouvera que l'expreſſion de la ſtabilité de la figure propoſée eſt, $\left(\frac{\overline{MN}^3}{12} - MNK \times FG'\right) \times \frac{QZ}{GQ}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

220. Il eſt évident que ſi $\frac{\overline{MN}^3}{12} > MNK \times FG'$, la figure aura de la ſtabilité, & qu'elle en aura d'autant plus, que le premier membre de cette inégalité ſera plus grand que le ſecond; que ſi $MNK \times FG' = \frac{\overline{MN}^3}{12}$, la figure ſera indifférente à tourner dans le ſens AKB ou dans le ſens ABK; mais que ſi $MNK \times FG' > \frac{\overline{MN}^3}{12}$, elle manquera de ſtabilité, & que loin de retourner à ſa première poſition, elle s'en écartera de plus en plus, & finira par ſe renverſer.

COROLLAIRE II.

221. Il ſuit de-là que la limite de la plus grande hauteur à laquelle on puiſſe placer le centre de gravité de la figure au-deſſus de celui de ſa partie ſubmergée, tant qu'on voudra que cette même figure ait de la ſtabilité, eſt donnée par l'équation $FG' = \frac{\overline{MN}^3}{12\,MNK}$. Or puiſque dans cette ſuppoſition le moment de la pouſſée verticale du fluide devient

nul, & que ce moment eſt exprimé en général par $mnK \times G'E'$, il eſt clair qu'alors $G'E' = 0$, & que par conſéquent le point G' tombe ſur le point g, interſection des deux perpendiculaires menées à la ſurface du fluide dans les deux poſitions de la figure. Si l'on veut donc que cette figure ait de la ſtabilité, il faut que ſon centre de gravité ſoit toujours placé au-deſſous du point g.

Le point g eſt celui que M. Bouguer appelle le *Métacentre* dans ſon Traité du Navire, & au-deſſous duquel doit tomber le centre de gravité de la charge totale d'un vaiſſeau, pour que ce vaiſſeau flottant à la mer ait de la ſtabilité.

COROLLAIRE III.

222. En nommant S la ſomme des produits des particules de la figure ABK par les quarrés de leurs diſtances au point G', on trouvera que la longueur du pendule ſynchrone aux oſcillations de cette figure, eſt exprimée par $\frac{12S}{\overline{MN}^3 - 12MNK \times FG'}$.

SCHOLIE I.

223. Pour réduire en formules la théorie des ſept articles précédens, nommons a la ligne MN de flottaiſon, b^2 l'aire ſubmergée MNK, h la diſtance du centre de gravité G ou G' de la figure entière ABK au centre de gravité F de ſa partie MNK; 1 le raïon conſtant & donné GQ, z l'arc QZ, A le moment de la force qui tend à ramener la figure à ſon pre-

mier état, & qui conſtitue ſa ſtabilité, L la longueur du pendule qui fait ſes oſcillations dans le même temps que la figure. On aura pour les deux cas,

$$A = \frac{(a^3 \pm 12hb^2)z}{12},$$

$$L = \frac{12S}{a^3 \pm 12hb^2}.$$

SCHOLIE II.

224. Lorſqu'on voudra appliquer ces formules à des exemples particuliers, on doit conſidérer que conſéquemment à nos ſuppoſitions & à nos raiſonnemens, b^2 repréſente la pouſſée verticale du fluide, ou ce qui revient au même, le poids abſolu de la figure ABK; a^3 eſt le produit du poids abſolu de l'aire a^2 ſuppoſée de même peſanteur ſpécifique que le fluide, par la ligne a; S eſt le produit d'un poids connu (qu'on peut toujours convertir en celui d'une partie connue du fluide), par le quarré d'une ligne connue. La figure du corps flottant étant donnée, on trouve les quantités b^2, S par la Géométrie. Ordinairement cette recherche demande le ſecours du calcul intégral, ſur-tout pour la détermination de S. C'eſt pourquoi je me borne ici à éclaircir ce que je viens de dire, par un exemple ſimple qui eſt traitable par la ſeule Géométrie élémentaire.

Soit la figure propoſée ABK (Fig. 65) un triangle iſocèle homogène, la partie ſubmergée MNK un triangle auſſi iſocèle. Ayant mené du ſommet K la perpendiculaire KCD ſur les baſes parallèles MN, AB; Fig. 55.

ſi l'on fait $MN = a$, $KC = c$, $AB = f$, $KD = g$; la peſanteur ſpécifique du fluide $= \varpi$, il faudra mettre dans la première formule du ſecond cas, $\varpi . a^3$ à la place de a^3, $\varpi . \frac{ac}{2}$ à la place de b^2, $\frac{1}{3} g - \frac{2}{3} c$ à la place de h; & elle deviendra

$$A = \frac{\varpi [a^3 - 4ac(g-c)] f}{12},$$

quantité qui doit être poſitive, pour que le triangle ait de la ſtabilité.

Pour déterminer L, je cherche d'abord S. Soit VE une perpendiculaire quelconque à l'axe KD du triangle AKB; & ſoit pris ſur cette ligne l'élément Tt; enſuite ſoit tirée la droite TK. Il eſt clair qu'on aura la ſomme des produits de tous les points de VE par les quarrés de leurs diſtances au ſommet K, en répétant le produit $Tt \times \overline{TK}^2$ autant de fois qu'il y a d'élémens dans la droite VE. Or ſi l'on ſe ſert du ſigne $\int$ pour déſigner le mot *ſomme*, on aura d'abord $\int Tt \times \overline{TK}^2 = \int Tt \times \overline{EK}^2 + \int Tt \times \overline{TE}^2$. Mais on a évidemment $\int Tt \times \overline{EK}^2 = VE \times \overline{EK}^2$, & $\int Tt \times \overline{TE}^2 = \frac{\overline{VE}^3}{3}$. Ainſi la ſomme des produits de tous les points de VE par les quarrés de leurs diſtances au ſommet K, eſt exprimée par $VE \times \overline{EK}^2 + \frac{\overline{VE}^3}{3}$, ou bien, en obſervant que $VE = EK \times \frac{AD}{KD}$,

$\frac{AD}{KD}$, par $\overline{EK}^3 \times \left(\frac{AD}{KD} + \frac{\overline{AD}^3}{3\overline{KD}^3}\right)$. Maintenant soit pris le point e infiniment proche de E, ensorte que Ee soit un élément de la hauteur KD. On aura

$$2\int Ee \times \overline{EK}^3 \times \left(\frac{AD}{KD} + \frac{\overline{AD}^3}{3\overline{KD}^3}\right) = \frac{\overline{KD}^4}{2} \times$$

$\left(\frac{AD}{KD} + \frac{\overline{AD}^3}{3\overline{KD}^3}\right) = \frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48}$, pour l'expression de la somme des produits de tous les points du triangle ABK, par les quarrés de leurs distances au sommet K. Or la somme analogue S qu'on cherche, relativement au centre de gravité G, est représentée (El. de Dyn. art. CXLV), par $\left(\frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48}\right)$ $- \frac{fg}{2} \times \frac{4g^2}{9} = \frac{fg}{2} \times \frac{3ff + 4gg}{72}$, expression dans laquelle $\frac{fg}{2}$ représente le poids du triangle ABK, lequel étant le même que celui du fluide déplacé par le triangle MNK, aura par conséquent $\frac{\varpi ac}{2}$ pour valeur. Par conséquent $S = \frac{\varpi ac}{2} \times \frac{3ff + 4gg}{72}$. Nous aurons donc enfin

$$L = \frac{c\,(3ff + 4gg)}{12\,(a^2 - 4c\,(g - c))}.$$

PROPOSITION II. PROBLEME.

225. *Déterminer la ſtabilité d'un corps ſolide flottant ſur un fluide?*

SOLUTION.

Il peut ſe faire, comme on le verra dans les notes, qu'un corps ſolide flottant ſur un fluide oſcille tout-à-la-fois autour de différens axes paſſant par ſon centre de gravité; mais ici nous ne pouvons conſidérer que les oſcillations ſimples qui ſe font autour d'un ſeul & même axe horiſontal & immobile qui paſſe par le centre de gravité du corps.

Fig. 64. Soit *ABK* (Fig. 64) la coupe verticale du corps, perpendiculaire à l'axe de rotation qui y eſt repréſenté par le point *G* ou *G'*. Que *F* repréſente l'axe horiſontal, perpendiculaire à *ABK*, & paſſant par le centre de gravité de la partie du corps, plongée dans le fluide. Soit achevé d'ailleurs le reſte de la conſtruction comme ci-deſſus. Il eſt évident que tout ſera le même que dans le problême précédent, avec cette différence qu'ici *MN* eſt le profil de la ſurface de flottaiſon du corps, & que *NVn*, *MVm* repréſentent deux onglets formés par la rotation des ſurfaces *NV*, *MV* autour de l'axe horiſontal déſigné par le point *V* dans le profil *ABK*. Les deux onglets dont on vient de parler, ſont néceſſairement égaux, parce qu'on ſuppoſe que le centre de gravité du corps ne monte ni ne deſcend. Ainſi le point *V* eſt néceſſairement le centre de gravité du plan de

flottaison MN ; car l'égalité des deux onglets proposés, rend les distances des centres de gravité des deux surfaces NV ; MV, au point V, réciproquement proportionnelles à ces mêmes surfaces. Il suit de tout cela qu'en faisant

Le raïon constant & donné GQ . . . . $= x$

L'arc QZ qui mesure l'inclinaison primitive & très-petite du solide . . . . $= z$

La partie du solide, plongée dans le fluide, & exprimée par MNK . . . . $= N$

La distance du point G ou G' au point F . . . $= h$

L'onglet NVn ou son égal MVm . . . . $= b^3 . z$

Le moment de l'onglet NVn, par rapport à l'axe de rotation . . . . $= b^3 c . z$

Le moment de l'onglet MVm, par rapport au même axe, ... $= b^3 f . z$

La somme des produits des particules du corps, par les quarrés de leurs distances à l'axe de rotation . . . . $= S$

Le moment de la force qui constitue la stabilité du corps proposé . . . . $= A$

La longueur du pendule qui fait ses oscillations dans le même temps que le solide . . . . $= L$,

on trouvera, par la même méthode que ci-dessus,

$$A = (b^3 c + b^3 f \pm hN) z,$$

$$L = \frac{S}{b^3 c + b^3 f \pm hN},$$

formules sur l'usage desquelles on fera des remarques analogues à celles qu'on a faites (224) pour

les figures planes. On voit que les quantités S, N, h, b, c, f ſont données par la figure du corps & de ſa partie ſubmergée, & que l'angle très-petit z eſt donné par hypothèſe.

Il eſt à remarquer que dans toute cette théorie des oſcillations des corps flottans, on néglige la réſiſtance que le corps éprouve en frappant l'eau par ſa partie ſubmergée, & l'air par ſa partie extérieure, comme des forces très-petites & incomparablement moindres que le poids du corps ou la pouſſée verticale du fluide. Mais ces petites forces répétées pendant un certain temps, finiſſent par anéantir le mouvement du corps qui ſe met en équilibre ſur le fluide, ſuivant les loix expliquées dans la ſection précédente, à moins que quelque nouvelle cauſe n'empêche cet état, & ne travaille à perpétuer le mouvement.

NOTES SUR LE CHAPITRE III.

Théorie générale des oſcillations des corps flottans.

I. Je me propoſe ici de donner la théorie des oſcillations des corps flottants d'une manière beaucoup plus générale que mon plan ne m'a encore permis de le faire. Pluſieurs Géomètres du premier ordre ont écrit ſur ce ſujet. Il y a plus de 30 ans que M. Euler détermina la longueur du pendule ſimple iſochrone avec les oſcillations d'un corps flottant; & bienôt après M. Jean Bernoulli réſolut ce même problême, comme on le peut voir, tome IV

de ſes Œuvres. M. Euler a expoſé fort au long ſes recherches ſur toute cette matière, dans ſon excellent Ouvrage qui a pour titre *Scientia Navalis* (*Petrop.* 1749). On trouve auſſi dans le tome XI, des anciens Mémoires de l'Académie de Péterſbourg, pour l'année 1739, un écrit de M. Daniel Bernoulli, intitulé *de Motibus oſcillatoriis corporum humido inſidentium*, dans lequel l'Auteur détermine les mouvemens d'une figure plane qui flotte ſur un fluide, & dont le centre de gravité monte ou deſcend, tandis que la figure oſcille, à la manière des pendules, autour de ce point ; mais dans l'hypothèſe limitée que le mouvement vertical de la figure & ſon mouvement de rotation ſont ſynchrones ou de même durée. En 1752, M. d'Alembert donna, dans ſon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, la méthode générale & complette de trouver les oſcillations de toutes ſortes de corps flottans, ſans ſuppoſer aucun rapport conſtant entre le mouvement du centre de gravité, & celui de rotation. Il a depuis développé en détail cette méthode dans le tome I de ſes Opuſcules Math. (*Paris.* 1761). Voici la même matière, traitée d'une manière nouvelle, & aſſez ſimple, ce me ſemble. J'ai déja employé cette méthode dans mes deux pièces ſur *l'arrimage des vaiſſeaux*, qui ont partagé les prix de l'Académie en 1761 & 1765.

II. Pour expoſer ma ſolution avec clarté, je vais rappeller d'abord les propoſitions de méchanique ſur leſquelles elle eſt fondée.

Lorſque des forces quelconques tendent à imprimer du mouvement à un corps, ce corps leur réſiſte par ſon inertie, ſuivant des directions contraires ; & il y a toujours équilibre à chaque inſtant entre les forces ſollicitantes & les forces réſiſtantes. Or pour déterminer les loix de cet équilibre, imaginons par un point fixe A (Fig. 66) trois axes AP, AC, AB perpendiculaires entr'eux, & immobiles dans l'eſpace abſolu. On peut concevoir, pour fixer l'imagination, que les deux axes AP, AC ſont ſitués dans le plan de la planche, & que l'axe AB eſt perpendiculaire au même plan. Quelque puiſſe être le nombre, & quelles que puiſſent être les directions des forces appliquées au corps propoſé, il eſt clair que toutes ces forces pourront toujours, à chaque inſtant, être réduites à trois forces ſeulement, parallèles chacune à chacun des trois axes AP, AC, AB. Je ſuppoſe que ces forces ainſi réduites, ſont dirigées dans les ſens Ff, Ee, Dd, & qu'elles ſont exprimées par les lignes Ff, Ee, Dd. D'un point quelconque N du corps, ſoit abbaiſſée NM perpendiculaire au plan CAP, & ſoit tirée MP perpendiculaire à AP. Soit décompoſée la réſiſtance que la molécule du corps, placée en N, oppoſe au mouvement par ſon inertie, en trois forces Np, Nm, Nn parallèles reſpectivement aux trois axes AP, AC, AB. Pour que l'équilibre dont nous avons parlé ait lieu, il faut 1°. que la réſultante ou la ſomme de chacune de ces forces élémentaires ſoit égale à la force ſollicitante qui lui correſpond ; 2°. que

le moment provenant des premières forces, par rapport à chacun de nos trois axes, ſoit égal au moment correſpondant qui provient des forces ſollicitantes. Ainſi en ſuppoſant force $Ff = F$, force $Ee = E$, force $Dd = D$, $AP = q$, $PM = r$, $NM = s$, l'élément du temps $= dt$, chaque molécule du corps $= dP$, on aura

1°. ces trois équations $F = \int \frac{dP\,ddq}{dt^2}$, $E = \int \frac{dP\,ddr}{dt^2}$, $D = \int \frac{dP\,dds}{dt^2}$.

2°. Ayant ſuppoſé que les directions des forces F, E, D rencontrent les trois plans BAC, BAP, CAP aux points F, E, D reſpectivement, ſoient menées parallèlement à CA les droites FO, DK aux deux axes AB, AP; parallèlement à AB les droites FQ, ER aux deux axes AC, AP; parallèlement à AP les droites ES, DH aux deux axes AB, AC. Il eſt viſible que le moment de la force F, par rapport à AP eſt nul, que le moment de cette force par rapport à AC eſt $F \times FQ$, que le moment de cette même force par rapport à AB eſt $F \times FO$; que le moment de la force E par rapport à AC eſt nul, que le moment de cette force par rapport à AB eſt $E \times ES$, que le moment de cette même force par rapport à AP eſt $E \times ER$; que le moment de la force D par rapport à AB eſt nul, que le moment de cette force par rapport à AC eſt $D \times DH$, que le moment de cette même force par rapport à AP eſt $D \times DK$. Il n'eſt pas moins

clair que de la combinaiſon de ces différens momens, il réſultera,

relativement à AC, un moment unique $= F \times FQ - D \times DH$,

relativement à AB, un moment unique $= F \times FO - E \times ES$,

relativement à AP, un moment unique $= E \times ER - D \times DK$.

En analyſant de la même manière les momens de la réſiſtance de la molécule dP placée en N, par rapport aux trois axes AC, AB, AP, il réſultera,

relativement à AC, un moment unique $= \int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,dds}{dt^2}$,

relativement à AB, un moment unique $= \int \frac{r\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,ddr}{dt^2}$,

relativement à AP, un moment unique $= \int \frac{s\,dP\,ddr}{dt^2} - \int \frac{r\,dP\,dds}{dt^2}$.

Egalant chacun à chacun ces momens aux momens correſpondans des forces ſollicitantes, on aura les trois autres équations

$$F \times FQ - D \times DH = \int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,dds}{dt^2},$$

$$F \times FO - E \times ES = \int \frac{r\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,ddr}{dt^2},$$

$$E \times ER - D \times DK = \int \frac{s\,dP\,ddr}{dt^2} - \int \frac{r\,dP\,dds}{dt^2}.$$

III. Par le centre de gravité G du corps concevons trois nouveaux axes GV, GT, GY parallèles chacun à chacun des axes fixes AP, AC, AB. Ces axes GV, GT, GY ſont mobiles avec le centre de gravité; mais chacun d'eux demeure toujours parallèle à lui-même. Soient par rapport au point G, les trois coordonnées GV, VL, LN qui répondent

au point N. Ayant prolongé l'axe VG juſqu'à ce qu'il rencontre en Z le plan BAC, du point Z ſoient menées les droites ZI, ZX parallèles chacune à chacun des deux axes AC, AB. Conſervons les dénominations précédentes, & ſuppoſons de plus $ZG = \pi$, $AX = \varpi$, $AI = \theta$, $GV = q'$, $VL = r'$, $LN = s'$, la diſtance de la droite Ff au plan $TGV = \alpha$, la diſtance de la même ligne au plan $YGV = \beta$, la diſtance de la droite Ee au plan $YGT = \delta$, la diſtance de la même ligne au plan $TGV = \gamma$, la diſtance de la droite Dd au plan $YGT = \phi$, la diſtance de la même ligne au plan $YGV = \xi$. On aura évidemment $q = \pi + q'$, $r = \varpi + r'$, $s = \theta + s'$, $ddq = dd\pi + ddq'$, $ddr = dd\varpi + ddr'$, $dds = dd\theta + dds'$, $FQ = \theta + \alpha$, $FO = \varpi + \beta$, $ES = \pi + \delta$, $ER = \theta + \gamma$, $DH = \pi + \phi$, $DK = \varpi + \xi$. Subſtituant toutes ces valeurs dans les ſix équations fondamentales de l'article précédent, on aura

1°. les trois équations, $F = \int \frac{dP\,dd\pi}{dt^2} + \int \frac{dP\,ddq'}{dt^2}$, $E = \int \frac{dP\,dd\varpi}{dt^2} + \int \frac{dP\,ddr'}{dt^2}$, $D = \int \frac{dP\,dd\theta}{dt^2} + \int \frac{dP\,dds'}{dt^2}$. Or par la propriété du centre de gravité,

$$\int \frac{dP\,ddq'}{dt^2} = 0,\ \int \frac{dP\,ddr'}{dt^2} = 0,\ \int \frac{dP\,dds'}{dt^2} = 0.$$

De plus comme $dd\pi$, $dd\varpi$, $dd\theta$ ſont les mêmes pour tous les points du corps, on verra aiſément

que les équations précédentes deviennent $F = \frac{Pdd\Pi}{dt^2}$, $E = \frac{Pdd\varpi}{dt^2}$, $D = \frac{Pdd\theta}{dt^2}$.

2°. Pour ſçavoir ce que deviennent les trois autres équations, conſidérons d'abord les parties correſpondantes $F \times FQ$ & $\int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}$ de la première. On a $F \times FQ = F \times \theta + F \times \alpha$; & $\int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}$ $= \int \frac{(dP\,(\theta + s')(dd\Pi + ddq'))}{dt^2} = \int \frac{\theta\,dP\,dd\Pi}{dt^2}$ $+ \int \frac{s'\,dP\,dd\Pi}{dt^2} + \int \frac{\theta\,dP\,ddq'}{dt^2} + \int \frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}$ $= \frac{P\theta\,dd\Pi}{dt^2} + \frac{dd\Pi}{dt^2}\int s'\,dP + \theta\int \frac{dP\,ddq'}{dt^2}$ $+ \int \frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}$, quantité qui devient $F \times \theta + \int \frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}$, en mettant pour $\frac{P\theta\,dd\Pi}{dt^2}$ ſa valeur $F \times \theta$, & obſervant que, par la propriété du centre de gravité, $\int s'\,dP = 0$, $\int \frac{dP\,ddq'}{dt^2} = 0$. Si l'on fait les mêmes opérations ſur les autres parties correſpondantes de nos équations, & qu'on efface les termes qui ſe détruiſent, on trouvera que ces équations ſe réduiſent enfin aux ſuivantes

$$F \times \alpha - D \times \phi = \int \frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2} - \int \frac{q'\,dP\,dds'}{dt^2},$$

$$F \times \beta - E \times \delta = \int \frac{r'\,dP\,ddq'}{dt^2} - \int \frac{q'\,dP\,ddr'}{dt^2},$$

$$E \times \gamma - D \times \xi = \int \frac{s'\,dP\,ddr'}{dt^2} - \int \frac{r'\,dP\,dds'}{dt^2}.$$

IV. Quelque puiſſe être le mouvement de chaque point N du corps propoſé, relativement au centre de gravité, nous pouvons toujours concevoir qu'il eſt produit par la rotation du corps autour des trois axes GY, GV, GT. Suppoſons (Fig. 67) qu'au prémier inſtant le point N ſoit en H; & ſoient GE, EF, FH les coordonnées correſpondantes. Imaginons qu'en vertu de la rotation du corps autour de l'axe GY, la droite FH, en tournant parallèlement à elle-même, prenne la poſition SK; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GV, le point K parvienne en R; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GT le point R parvienne en N. Les coordonnées NL, LV, GV ſont ici les mêmes que dans la figure précédente. Soient tirées les droites GF, GS, DK. Du point R, ſoit abaiſſée RO perpendiculaire ſur le plan TGV; & par le point O ſoit menée perpendiculairement à GT la droite XO qui paſſe néceſſairement par le point L. Soient tirées les droites XR, XN. Enfin des points D & X, ſoient élevées perpendiculairement au plan TGV, ou parallèlement à l'axe GY, les droites DZ, XP. Suppoſons $GE = \psi$, $EF = \lambda$, $FH = \mu$, l'angle de rotation autour de l'axe $GY = x$, l'angle de rotation autour de l'axe $GV = y$, l'angle de rotation autour de l'axe $GT = z$, Fig. 67.

Puiſque l'angle DGS eſt la ſomme de l'angle EGF & de l'angle FGS (x), on aura $DS = GF \times \text{ſin.}\, DGS = \lambda \text{ coſ.}\, x + \psi \text{ ſin.}\, x$; $GD = GF \times \text{coſ.}\, DGS = \psi \text{ coſ.}\, x - \lambda \text{ ſin.}\, x$.

L'angle RDZ ou ORD étant la ſomme de l'angle KDZ ou DKS & de l'angle RDK (y), on aura $DO = DK.$ ſin. $RDZ = DS.$ coſ.$y + SK.$ ſin.y $= \lambda$ coſ. x coſ.$y + \psi$ ſin. x coſ. $y + \mu$ ſin. y; $RO = DK \times$ coſ. $RDZ = SK \times$ coſ.$y - DS$ $\times$ ſin.$y = \mu$ coſ. $y - \lambda$ coſ. x ſin. $y - \psi$ ſin. x ſin. y.

L'angle NXP ou XNL étant la différence de l'angle RXP ou XRO & de l'angle RXN (z), on aura $XL = XR \times$ ſin. $NXP = XO \times$ coſ. z $- RO \times$ ſin. $z = \psi$ coſ. x coſ. $z - \lambda$ ſin. x coſ. z $- \mu$ coſ. y ſin. $z + \lambda$ coſ. x ſin. y ſin. z + ψ ſin. x ſin.y ſin. z; $LN = XR \times$ coſ. NXP = $RO \times$ coſ. $z + XO \times$ ſin. $z = \mu$ coſ. y coſ. z $- \lambda$ coſ. x ſin. y coſ. $z - \psi$ ſin. x ſin. y coſ. z + ψ coſ. x ſin. $z - \lambda$ ſin. x ſin. z.

D'où il ſuit qu'à cauſe de $XL = GV = q'$, $DO = VI = r'$, $LN = s'$, on aura

$q' = \psi$ coſ. x coſ. $z - \lambda$ ſin x coſ. $z - \mu$ coſ.y ſin. $z + \lambda$ coſ. x ſin. y ſin.$z + \psi$ ſin x ſin.y ſin. z;

$r' = \lambda$ coſ. x coſ. $y + \psi$ ſin. x coſ. $y + \mu$ ſin. y;

$s' = \mu$ coſ.y coſ. $z - \lambda$ coſ. x ſin. y coſ. $z - \psi$ ſin. x ſin. y coſ. $z + \psi$ coſ. x ſin. $z - \lambda$ ſin. x ſin. z.

Ainſi on pourra chaſſer q', r', s', ddq', ddr', dds' des équations précédentes. Il eſt à remarquer au ſujet des trois quantités $\int s' dP ddq' - \int q' dP dds'$, $\int r' dP ddq' - \int q' dP ddr'$, $\int s' dP ddr' - \int r' dP dds'$, qui ſont les mêmes reſpectivement que $\int dP d(s' dq' - q' ds')$, $\int dP d(r' dq' - q' dr')$, $\int dP d(s' dr' - r' ds')$, il eſt à remarquer, dis-je, que dans les deux différentiations qu'il faut faire d'abord

pour trouver $d\,(s'\,dq' - q'\,ds')$, $d\,(r'\,dq' - q'\,dr')$, $d\,(s'\,dr' - r'\,ds')$, les angles x, y, z ſont variables, & les quantités ψ, λ, μ ſont conſtantes; mais que dans l'intégration qui ſuit, il n'y a que les quatre quantités dP, ψ, λ, μ qui doivent être regardées comme variables, & que les autres doivent être écrites au-devant du ſigne d'intégration, parce qu'alors les intégrales expriment les mouvemens des parties du corps.

Ces formules générales ſervent à déterminer les mouvemens d'un corps quelconque, animé de forces quelconques. Faiſons-en l'application à notre problême des oſcillations d'un corps flottant. Je ſuppoſerai toujours que ces oſcillations ſont fort petites, pour parvenir à des réſultats plus ſimples & plus ſatisfaiſans.

V. Soient, au premier inſtant du mouvement, *ABK* (Fig. 68) une ſection verticale du corps flottant, par un plan qui paſſe par ſon centre de gravité *G*, & qui contient l'axe vertical *GY* & l'axe horiſontal *GV*; *HPK* (Fig. 69) une autre ſection verticale, perpendiculaire à la première, qui paſſe auſſi par le centre de gravité *G*, & qui contient l'axe vertical *GY* & l'axe horiſontal *GT*; *MENI* (Fig. 70) la ſection horiſontale du corps, faite à fleur d'eau, & dans laquelle *MN* eſt la ſection commune des deux plans *MENI*, *ABK*; & *EI* eſt la ſection commune des deux plans *MENI*, *HPK*. Les trois axes *GY*, *GV*, *GT* ſont ici les mêmes que dans la Figure 66 ou 67. Faiſons paſſer, pour plus de ſimplicité dans le calcul, & ce qui eſt toujours permis, le plan *ABK* Fig. 68, 69, 70, 71.

(Fig. 68) par le centre de gravité L du plan de flottaiſon $MENI$ (Fig. 70). Le centre de gravité F (Fig. 71) de la partie ſubmergée au premier inſtant, étant ſuppoſé placé à une certaine diſtance (fort petite) de la verticale GY, menons par ce centre F & par la verticale GY le plan CDK qui coupe le plan $MENI$ ſuivant RS. Du point F, ſoient menées les droites FQ, FF', l'une perpendiculaire à GY, l'autre à RS. Soit auſſi menée par le point F' (Fig. 70), $F'f$ perpendiculaire à MN. Ici & dans la ſuite les quatre figures 68, 69, 70, 71, doivent toujours être combinées enſemble ; il faut ſe bien repréſenter leur poſition reſpective, & chercher dans chacune d'elles les lignes, les ſurfaces & les ſolides qu'on aura beſoin de déſigner.

VI. Cela poſé, il eſt clair que le corps en queſtion étant ſoumis ſeulement à l'effort de ſa peſanteur, & de la pouſſée verticale du fluide, les forces que nous avons nommées ci-deſſus F & E ſont ici nulles, & qu'il ne reſte que la ſeule force D qui eſt la différence de la pouſſée verticale du fluide, & de la peſanteur du corps ; que par conſéquent ce corps ne peut avoir aucun mouvement progreſſif horiſontal, ou que $\Pi = 0$, $\varpi = 0$; mais qu'en vertu de la force D, ſon centre de gravité peut monter ou deſcendre, tandis qu'il tourne autour des trois axes GY, GV, GT. Imaginons que pendant un certain temps t, le corps, en vertu de ſa rotation autour de l'axe GT, s'étant incliné du côté de A, & ayant décrit l'angle z, le plan de flottaiſon MN

prenne la position *mn*; & qu'en vertu de la rotation autour de l'axe *GV* le corps s'étant incliné du côté de *P*, & ayant décrit l'angle *y*, le plan de flottaison *EI* prenne la position *ei*. Par les points *q*, *q'* où *mn*, *ie* coupent la verticale *GY*, soient menées les droites *dc*, *tr* parallèles à *MN*, *EI*. On voit évidemment que durant le tems proposé il est sorti de l'eau un prisme ayant *MENI* pour base & *Oq* ou *Oq'* pour hauteur, plus les deux onglets *nqc*, *eq'r*; qu'au contraire il est entré dans l'eau les deux onglets *mqd*, *tq'i*. Ce sont-là les seuls changemens qui arrivent dans la partie submergée du corps; & il est visible que le mouvement autour de l'axe vertical *GY* n'y contribue en rien. Supposons que les verticales élevées par les centres de gravité des quatre onglets exprimés par leurs profils *nqc*, *mqd*, *eq'r*, *tq'i*, rencontrent le plan *MENI* aux points *g*, *z*, *l*, *s*, respectivement; & soient menées les droites *gh*, *zk*, *lp*, *su* perpendiculaires à *MN*. Qu'outre les dénominations précédentes, on prenne encore,

la pesanteur spécifique du corps . . . . $= p$
celle du fluide . . . . $= \varpi$
le volume entier du corps . . . . $= M$
celui de sa partie submergée au premier
instant . . . . $= N$
l'aire *MENI* . . . . $= aa$
la distance *OL* de son centre de gravité
au point *O* . . . . $= b$
l'onglet *nqc*, qu'on peut regarder comme
produit par la rotation de l'aire *EIN*

autour de EI . . . . $= c^3 z$

Oh . . . . $= e$

gh . . . . $= e'$

l'onglet mqd, qu'on peut regarder comme produit par la rotation de l'aire EIM autour de EI . . . . $= f^3 z$

Ok . . . . $= g$

zk . . . . $= g'$

l'onglet $eq'r$, qu'on peut regarder comme produit par la rotation de l'aire MNE autour de MN . . . . $= i^3 y$

Op . . . . $= k$

lp . . . . $= k'$.

l'onglet $iq'r$ qu'on peut regarder comme produit par la rotation de l'aire MNI autour de MN . . . . $= i^3 y$

Ou . . . . $= n$

su . . . . $= n'$.

la hauteur GQ du centre de gravité de la partie submergée, au-dessus de celui du corps . . . . $= h$

Of . . . . $= \delta$

$F'f$ . . . . $= \delta'$.

On aura d'abord, $D = \varpi \times (N - MENI \times Oq - nqc + mqd - eq'r + iq't) - p \times M = \varpi (N - MENI \times Oq - nqc + mqd) - p \times M = \varpi N - \varpi a^2 \theta - \varpi c^3 z + \varpi f^3 z - pM$.

De plus si l'on considère qu'en vertu de l'inclinaison du corps vers A, le centre de gravité F s'approche du plan HPK de la quantité hz ou que Of devient

devient $\delta - hz$; & qu'en vertu de l'inclinaiſon vers I, le même point F s'approche du plan ABK de la quantité hy ou que $F'f$ devient $\delta' - hy$, on verra ſans peine qu'après le temps t le moment de la pouſſée verticale du fluide, par rapport à l'axe GT, ou $D \times \phi = \varpi\,(N(\delta - hz) - a^2 b\theta - c^3 ez - f^3 gz - i^3 ky - i^3 ny)$, & que le moment de la même force, par rapport à l'axe GV, ou $D \times \xi = - \varpi\,(N(\delta' - hy) + c^3 e' z + f^3 g' z - i^3 k' y - i^3 n' y)$.

VII. Reſte à trouver les valeurs de $\int dPd\,(s'dq' - q'ds')$, $\int dPd\,(r'dq' - q'dr')$, $\int dPd\,(s'dr' - r'ds')$ en fonctions des angles x, y, z. Or comme les oſcillations ſont cenſées fort petites, il eſt clair que dans les valeurs de q', r', s' trouvées ci-deſſus, on pourra négliger tous les termes qui contiennent plus d'un ſinus, ſuppoſer dans les termes qui contiennent un ſinus & un coſinus ou deux coſinus, chaque coſinus $= 1$; & prendre l'angle pour le ſinus. Donc

$s'dq' - q'ds' = -\lambda\mu\,dx - (\mu^2 + \psi^2)\,dz + \psi\lambda\,dy$,

$r'dq' - q'dr' = -(\psi^2 + \lambda^2)\,dx - \lambda\mu\,dz - \psi\mu\,dy$,

$s'dr' - r'ds' = \psi\mu\,dx + (\lambda^2 + \mu^2)\,dy - \psi\lambda\,dz$.

Ainſi

$\int dPd\,(s'dq' - q'ds') = -\,pddx\int\lambda\mu\,dM - pddz\int(\mu^2 + \psi^2)\,dM + pddy\int\psi\lambda\,dM$,

$\int dPd\,(r'dq' - q'dr') = -\,pddx\int(\psi^2 + \lambda^2)\,dM - pddz\int\lambda\mu\,dM - pddy\int\psi\mu\,dM$,

$\int dPd\,(s'dr' - r'ds') = pddx\int\psi\mu\,dM + pddy\int(\lambda^2 + \mu^2)\,dM - pddz\int\psi\lambda\,dM$,

quantités dans leſquelles les parties compriſes ſous

le ſigne d'intégration ſont données par la figure du corps. Nous ferons pour abréger, $\int \lambda \mu \, dM = A$, $\int (\mu^2 + \psi^2) \, dM = B$, $\int \psi \lambda \, dM = C$, $\int (\psi^2 + \lambda^2) \, dM = G$, $\int \psi \mu \, dM = H$. $\int (\lambda^2 + \mu^2) \, dM = K$.

VIII. Il réſulte de tout ce qui précéde, qu'on aura les quatre équations,

(A) $[\varpi N - \varpi a^2 \theta - (\varpi c^3 - \varpi f^3) z - pM] \, dt^2 = pM \, dd\theta$,

(B) $-\varpi [N(\delta - hz) - a^2 b \theta - (c^3 e + f^3 g) z - (i^3 k + i^3 n) y] \, dt^2 = -pA \, ddx - pB \, ddz + pC \, ddy$,

(C) $pG \, ddx + pA \, ddz + pH \, ddy = 0$,

(D) $\varpi [N(\delta' - hy) + (c^3 e' + f^3 g') z - (i^3 k' + i^3 n') y] \, dt^2 = pH \, ddx + pK \, ddy - pC \, ddz$,

qui expriment en général toutes les oſcillations dont un corps flottant peut être affecté, dans l'hypothèſe que ces oſcillations ſont fort petites.

IX. Comme les quatre variables θ, x, y, z ne ſont qu'au premier degré dans les équations (A), (B), (C), (D), ces équations combinées enſemble s'intègrent facilement par les méthodes que M. d'Alembert a données dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1748 & 1750. Je ne ferai pas ici en général ce calcul qui n'a d'autre difficulté que ſa longueur. Je me borne à l'examen de quelques cas particuliers.

X. Suppoſons, comme il arrive dans les oſcillations des vaiſſeaux flottans à la mer, que le plan ABK partage le corps flottant en deux parties exactement égales, & que les centres de gravité des deux

onglets $eq'r$, $iq't$ se trouvent, du moins à peu près dans le plan HPK, on aura rigoureusement $e' = 0$, $g' = 0$; & dans l'équation (B) on pourra négliger les termes $i^3 ky$, $i^3 ny$, comme incomparablement plus petits que les autres. De plus on aura, par la propriété du centre de gravité, $\int \lambda \mu dM = 0$, $\int \psi \lambda dM = 0$. Ainsi nos équations se changeront en celles-ci,

$$[\varpi N - \varpi a^2 \theta - (\varpi c^3 - \varpi f^3) z - pM] dt^2 = pM dd\theta, \quad (E)$$

$$\varpi [N(\delta - hz) - a^2 b\theta - (c^3 e + f^3 g) z] dt^2 = pB ddz, \quad (F)$$

$$G ddx + H ddy = 0, \quad (G)$$

$$\varpi [N(\delta' - hy) - 2 i^3 k' y] dt^2 = pH ddx + pK ddy. \quad (H)$$

résultats qui reviennent à ceux que j'ai trouvés un peu différemment dans les deux piéces citées.

Comme on peut mettre dans la dernière équation, à la place de $pH\,ddx$ sa valeur $-\frac{pH^2 ddy}{G}$, & que H est une quantité dont le quarré, tout au moins, peut être traité comme infiniment petit du premier ordre, on pourra négliger le terme $-\frac{pH^2 ddy}{G}$. Soient pour abréger le calcul, $\frac{\varpi N - pM}{pM} = I$, $\frac{\varpi a^2}{pM} = L$, $\frac{\varpi c^3 - \varpi f^3}{pM} = P$, $\frac{\varpi N\delta}{pB} = Q$, $\frac{\varpi a^2 b}{pB} = R$, $\frac{\varpi(Nh + c^3 e + f^3 g)}{pB} = S$,

$\frac{\varpi N\delta'}{pK} = T, \frac{\varpi(Nh + 2i^3 k')}{pK} = V.$ Nos quatre équations deviennent

$$dd\theta - Idt^2 + L\theta dt^2 + Pzdt^2 = 0,$$
$$ddz - Qdt^2 + R\theta dt^2 + Szdt^2 = 0,$$
$$Gddx + Hddy = 0,$$
$$ddy - Tdt^2 + Vydt^2 = 0.$$

XI. Les deux premières combinées enſemble s'intègrent très-ſimplement par l'ingénieuſe méthode de M. d'Alembert. Voici ce calcul. Ayant multiplié la première par un coëfficient indéterminé ν, je l'ajoute à la ſeconde ; ce qui donne $\nu dd\theta - \nu Idt^2 + \nu L\theta dt^2 + \nu Pzdt^2 + ddz - Qdt^2 + R\theta dt^2 + Szdt^2 = 0.$ Enſuite je ſuppoſe que l'on ait l'équation $\nu L\theta + \nu Pz + R\theta + Sz = \varepsilon(\nu\theta + z)$, ε étant un coëfficient indéterminé ; ce qui donne, en comparant enſemble les termes de même eſpèce, ces deux équations $\nu L + R = \varepsilon\nu$, $\nu P + S = \varepsilon$. D'où l'on tire deux valeurs de ν que je nomme ν & ν', & deux valeurs de ε que je nomme ε & ε'. Soient $\nu\theta + z = s$, $\nu'\theta + z = s'$: l'équation $\nu dd\theta - \nu Idt^2 +$ &c. donnera ces deux autres

$$dds + \varepsilon s dt^2 - (\nu I + Q)dt^2 = 0,$$
$$dds' + \varepsilon' s' dt^2 - (\nu' I + Q)dt^2 = 0.$$

Multipliant la première par ds, la ſeconde par ds'; enſuite intégrant deux fois, on trouvera facilement

$$s = \left(\frac{\nu I + Q}{\varepsilon}\right) \times (1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{\varepsilon}).$$

$$s' = \left(\frac{\nu' I + Q}{\varepsilon'}\right) \times (1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{\varepsilon'});$$

& par conséquent

$$\theta = \frac{(\nu I + Q)}{\varepsilon(\nu - \nu')} \times (1 - \text{cof.}\, t \sqrt{\varepsilon}) - \frac{(\nu' I + Q)}{\varepsilon'(\nu - \nu')} \times (1 - \text{cof.}\, t \sqrt{\varepsilon'}),$$

$$z = \frac{(\nu' I + Q)\nu}{\varepsilon'(\nu - \nu')} (1 - \text{cof.}\, t \sqrt{\varepsilon'}) - \frac{(\nu I + Q)\nu'}{\varepsilon(\nu - \nu')} (1 - \text{cof.}\, t \sqrt{\varepsilon}).$$

Ces valeurs de θ & de z sont complettes, parce qu'on doit avoir $\theta = 0$ & $z = 0$, lorſque $t = 0$, & que $t = 0$ donne $\text{cof.}\, t \sqrt{\varepsilon} = 1$, $\text{cof.}\, t \sqrt{\varepsilon'} = 1$.

Quant aux deux dernières équations fondamentales $G ddx + H ddy = 0$, $ddy - T dt^2 + V y dt^2 = 0$, elles s'intègrent tout de ſuite, & donnent

$$y = \frac{T}{V} (1 - \text{cof.}\, t \sqrt{V}),$$

$$x = - \frac{H.T}{G.V} (1 - \text{cof.}\, t \sqrt{V}).$$

XII. Il eſt évident, par les expreſſions de θ & de z que ſi ε & ε' ſont des quantités réelles & poſitives, le mouvement θ du centre de gravité & celui de rotation z autour de l'axe GT ſont très-petits, comme on les a ſuppoſés, & que par conſéquent le corps fera des oſcillations qui ne l'expoſeront pas à verſer. Mais ſi ε & ε étoient des quantités réelles négatives, on trouveroit que les valeurs de θ & de z dépendroient des logarithmes, & qu'ainſi t augmentant, elles augmenteroient. D'où il ſuit que les oſcillations

ne feroient plus infiniment petites, comme on les a fuppofées, & que le corps n'auroit pas de ftabilité, ou feroit expofé à verfer. On trouve pareillement que les valeurs de θ & de z contiennent des logarithmes, lorfque ν & ν', & par conféquent auffi ε & ε' font imaginaires, ou lorfque ν & ν' étant des quantités réelles, ces deux quantités font égales entr'elles. Mais ces deux derniers cas font purement géométriques, & n'ont pas lieu dans notre problême.

Pareillement, les valeurs de y & de x feront infiniment petites, lorfque V fera une quantité pofitive; mais fi V étoit une quantité négative, le corps n'auroit pas de ftabilité par rapport aux deux axes GV, GY, & finiroit par verfer.

On voit que les conditions de ftabilité dont je viens de parler, dépendent de la pofition du centre de gravité du corps entier, par rapport à celui de fa partie fubmergée, confidérée comme homogène. Toutes les fois que le premier point eft placé plus bas que le fecond, le corps flottant a de la ftabilité en tout fens; mais fi au contraire le premier point eft placé plus haut que le fecond, ce corps pourra manquer de ftabilité; nos formules font connoître la plus grande hauteur qu'on puiffe mettre alors entre les deux centres de gravité. Cette manière de déterminer les *métacentres* eft générale, fimple & directe.

XIII. Lorfque la verticale GY paffe par le centre de gravité du plan de flottaifon, & que les deux plans ABK, HPK partagent chacun le corps en deux parties égales & femblables, les deux onglets

nqc, mqd ſont égaux, de même que les deux onglets $eq'r$, $iq't$. De plus on a $\int \lambda \mu dM$ ou $A = 0$, $\int \psi \lambda dM$ ou $C = 0$, $\int \psi \mu dM$ ou $H = 0$. Par conſéquent ſi l'on ſuppoſe qu'au premier inſtant le poids du fluide déplacé ſoit égal au poids abſolu du corps, ou qu'on ait $\varpi N = pM$, le corps ne pourra ni monter ni deſcendre, & on aura $\theta = 0$. On aura auſſi $x = 0$, abſtraction faite de tout mouvement de rotation horiſontale, primitivement imprimé. Nos quatre équations fondamentales de l'article X ſe réduiront donc aux deux ſuivantes

$$ddz - Q dt^2 + S z dt^2 = 0,$$

$$ddy - T dt^2 + V y dt^2 = 0,$$

leſquelles donnent

$$z = \frac{Q}{S}(1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{S}),$$

$$y = \frac{T}{V}(1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{V}).$$

Le corps propoſé a donc alors ſimplement deux mouvemens de rotation qui ſe font autour des deux axes horiſontaux $G\Gamma$, GV paſſant par ſon centre de gravité & perpendiculaires entr'eux. Ces oſcillations demeurent toujours fort petites, & par conſéquent le corps a de la ſtabilité, lorſque S & V ſont des quantités poſitives. Elles ſont abſolument de même eſpèce que celles d'un pendule qui va & vient ; & en nommant Z, Y leurs amplitudes totales, on a évidemment $Z = \frac{2Q}{S}$, $Y = \frac{2T}{V}$.

A l'égard des temps employés à parcourir les angles

Z, Y, ils ſont faciles à trouver. Car pour que z devienne Z, & que y devienne Y, il faut que l'on ait $1 - \text{coſ.}\ t\sqrt{S} = 2$, $1 - \text{coſ.}\ t\sqrt{V} = 2$, ou bien $\text{coſ.}\ t\sqrt{S} = -1$, $\text{coſ.}\ t\sqrt{V} = -1$, & par conſéquent $t = \frac{180^\circ}{\sqrt{S}}$, $t = \frac{180^\circ}{\sqrt{V}}$. Subſtituant à la place de S & V leurs valeurs, on trouvera que le temps de chaque oſcillation Z eſt exprimé par $180^\circ \times \sqrt{\left[\frac{\int p(\psi^2 + \mu^2)\,dM}{\varpi(Nh + 2c^3 e)}\right]}$, & que de même celui de chaque oſcillation Y eſt exprimé par $180^\circ \times \sqrt{\left[\frac{\int p(\lambda^2 + \mu^2)\,dM}{\varpi(Nh + 2i^3 k')}\right]}$. Or comme ces valeurs ne contiennent point les diſtances initiales δ, δ' du centre de gravité de la partie ſubmergée aux plans HPK, ABK, il eſt clair que les oſcillations ſeront iſochrones dans chaque eſpèce, quelles que ſoient leurs amplitudes totales, pourvu néanmoins qu'elles ſoient toujours fort petites. Le corps oſcille donc à la manière des pendules. Pour déterminer la longueur des pendules ſynchrones aux oſcillations de ce corps, on remarquera que ſi un pendule ſimple dont la longueur eſt L, eſt diſtant au premier inſtant de la verticale, de la quantité δ, fort petite, & décrit dans le temps t l'angle u qui a L pour raïon; l'équation de ce pendule eſt $ddu = \frac{(\delta - u)\,dt^2}{L}$, ou bien $u = \delta\left(1 - \text{coſ.}\ \frac{t}{\sqrt{L}}\right)$.

D'où l'on tire le temps d'une oſcillation entière =

180° × $\sqrt{L}$. Ainſi la longueur du pendule ſynchrone aux oſcillations Z eſt donnée par l'équation

$$L = \frac{\int p(\psi^2 + \mu^2)\, dM}{\varpi(Nh + 2c^3 e)},$$

& celle du pendule ſynchrone aux oſcillations Y eſt donnée par l'équation

$$L = \frac{\int p(\lambda^2 + \mu^2)\, dM}{\varpi(Nh + 2i^3 k')}.$$

XIV. Je terminerai ces recherches par l'application des formules de l'art. précédent à un exemple particulier.

Soit le corps flottant (Fig. 72) un demi-ſphéroïde elliptique $AKBPAH$ homogène produit par la demie révolution de la demie ellipſe AHB autour de ſon axe AB. Le plan $AHBP$ qui ſert de baſe au demi ſphéroïde, & le plan de flottaiſon $MENI$ ſont parallèles & diſtants l'un de l'autre d'une quantité donnée ZO. Le point G eſt le centre de gravité du demi-ſphéroïde, & les trois axes GY, GV, GT ſont les mêmes que ci-deſſus. ABK eſt la ſection longitudinale du corps, HPK la ſection latitudinale. Il s'agit de trouver ici les valeurs des quantités N, h, $c^3 e$, $i^3 k'$, $\int(\psi^2 + \mu^2)\, dM$, $\int(\lambda^2 + \mu^2)\, dM$. Cherchons-les par ordre. Fig. 72.

1°. Pour éviter la multiplicité & la confuſion des lignes, conſidérons $MENI$ comme une ſection indéterminée du demi-ellipſoïde. Ayant mené à l'axe MN de la courbe $MENI$ l'ordonnée quelconque CD, qu'on faſſe paſſer par cette ordonnée le plan vertical $SCXC'L$ qui coupe le plan ver-

tical ABK ſuivant XR. On voit que CD ſera auſſi l'ordonnée d'un cercle dont RX eſt le raïon. Ainſi $\overline{CD}^2 = \overline{XR}^2 - \overline{DR}^2$. Mais par la propriété de l'ellipſe, $\overline{XR}^2 = (\overline{BZ}^2 - \overline{RZ}^2) \times \frac{\overline{ZP}^2}{\overline{BZ}^2} = (\overline{BZ}^2 - \overline{DO}^2) \times \frac{\overline{ZP}^2}{\overline{BZ}^2}$, & $\overline{DR}^2 = (\overline{BZ}^2 - \overline{NO}^2) \times \frac{\overline{ZP}^2}{\overline{BZ}^2}$. Donc $\overline{CD}^2 = (\overline{NO}^2 - \overline{DO}^2) \times \frac{\overline{ZP}^2}{\overline{BZ}^2}$. D'où l'on voit que la courbe $MENI$ eſt une ellipſe ſemblable à l'ellipſe $AHBP$. Soient $BZ = a$, ZP ou $ZK = b$, $ZO = x$, le rapport de la circonférence au diamètre $= n$. On aura $AHBP = nab$, $MENI = nab \times \frac{\overline{NO}^2}{\overline{BZ}^2} = \frac{na(bb - xx)}{b}$. Donc $dN = -\frac{nadx(bb - xx)}{b}$, & $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2x + \frac{x^3}{3}\right)$, en complettant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouiſſe, lorſque $x = b$. Faiſons $x = ZO = f$, ligne connue ; nous aurons la quantité que nous cherchons $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2f + \frac{f^3}{3}\right)$. En ſuppoſant $f = 0$, N devient ce que nous avons appellé M ; & on a par conſéquent $M = \frac{2nab^2}{3}$.

2°. Le moment élémentaire du ſolide *MKNIME*, par rapport au point Z, eſt $-\frac{nax\,dx(bb-xx)}{b}$, dont l'intégrale complette eſt $\frac{na}{b}\left(\frac{b^4}{4}-\frac{b^2x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)$. Faiſons d'abord $x=0$, & diviſons par M ou $\frac{2nab^2}{3}$; nous aurons la diſtance du centre de gravité du ſolide *AKBPAH* au point Z, $=\frac{3}{8}b$. Faiſons enſuite $x=f$, & diviſons par N ou $\frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3-bf^2+\frac{f^3}{3}\right)$; nous aurons la diſtance du centre de gravité de la partie ſubmergée au point Z, $=\frac{3(b^4-2b^2f^2+f^4)}{4(2b^3-3b^2f+f^3)}$. Par conſéquent $h=\frac{3}{8}b-\frac{3(b^4-2b^2f^2+f^4)}{4(2b^3-3b^2f+f^3)}$.

3°. Imaginons que l'onglet formé par la rotation de l'aire *EIN* autour de *EI*, eſt compoſé d'une infinité de triangles prs perpendiculaires à l'axe *EI*. En faiſant, pour un moment, $OI=l$, $ON=m$, $Op=u$; il eſt clair que $pr=\frac{m}{l}\sqrt{[ll-uu]}$, & que le moment élémentaire du demi-onglet $=\frac{m^2}{l^2}(ll-uu)\times\frac{m\sqrt{[ll-uu]}}{3l}\times du\times z$ $=\frac{m^3z}{3l^3}\times du\,(ll-uu)^{\frac{3}{2}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{m^3z}{3l^3}\times\left(\frac{u(ll-uu)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{3}{4}l^2\int du\sqrt{[ll-uu]}\right)$.

Faiſant $u = l$, conſidérant qu'alors $\int du \sqrt{[ll - uu]}$ repréſente l'aire d'un quart de cercle dont le raïon eſt l, & doublant l'intégrale, on trouvera que la quantité exprimée par $c^3 e = \frac{n m^3 l}{8}$. Mettons pour m ſa valeur $\frac{a}{b} \sqrt{[bb - ff]}$, pour l ſa valeur $\sqrt{[bb - ff]}$; nous aurons $c^3 e = \frac{n a^3 (bb - ff)^2}{8 b^3}$.

4°. On trouvera de la même manière que la quantité exprimée par $i^3 k' = \frac{n b^3 (aa - ff)^2}{8 a^3}$.

5°. Pour déterminer $\int (\psi^2 + \mu^2) dM$ ou la ſomme des produits des particules du demi-ellipſoïde par les quarrés de leurs diſtances à l'axe latitudinal GT, je conſidère, ainſi que je l'ai déja fait, $MENF$ comme une ſection indéterminée du demi-ſphéroïde. Sur l'ordonnée CD à l'axe MN, je prends les deux points quelconques infiniment voiſins f, u. Ayant ſuppoſé $ZO = x$, OM ou $ON = m$, $OD = q$, $Df = s$, & nous rappellant que $ZG = \frac{3}{8} b$, on verra ſans peine que le produit de l'élément fu par le quarré de ſa diſtance à l'axe GT eſt repréſenté par $ds \left(qq + (\frac{3}{8} b - x)^2 \right)$, quantité dans laquelle il n'y a que s de variable. Intégrant & faiſant enſuite $s = DC = \frac{b}{a} \sqrt{[m^2 - q^2]}$, on aura $\left(qq + (\frac{3}{8} b - x)^2 \right) . \frac{b}{a} \sqrt{[m^2 - q^2]}$

pour la ſomme des produits de tous les points de DC par les quarrés de leurs diſtances à l'axe GT. Multipliant cette ſomme par dq, iutégrant en ne faiſant varier que q, on trouvera $\frac{b}{a}\left(\frac{m^2}{4} + (\frac{3}{8}b - x)^2\right)\int dq\sqrt{[m^2 - q^2]} - \frac{q(mm - qq)^{\frac{3}{2}}}{4}$ pour la ſomme des produits de tous les points de l'aire elliptique $CDOE$ par les quarrés de leurs diſtances à l'axe GT. Faiſant $q = m = \frac{a}{b}\sqrt{[bb - xx]}$, & conſidérant qu'alors $\int dq\sqrt{[m^2 - q^2]} = \frac{n.m^2}{4} = \frac{na(bb - xx)}{4b}$; quadruplant l'intégrale : il nous viendra $\frac{nb}{a}\left[\frac{a^4(bb - xx)^2}{4b^4} + \frac{a^2(bb - xx)}{b^2}(\frac{3}{8}b - x)^2\right]$ pour la ſomme des produits de tous les points de l'ellipſe entière $MENI$, par les quarrés de leurs diſtances à l'axe GT. Enfin multipliant par dx, intégrant en ne faiſant varier que x, faiſant enſuite $x = b$, on aura $\int(\psi^2 + \mu^2)dM = \frac{n(64a^3b^2 + 19ab^4)}{480}$.

6°. On trouvera de la même manière la ſomme des produits des particules du demi-ellipſoïde par les quarrés de leurs diſtances à l'axe longitudinal GV, ou $\int(\lambda^2 + \mu^2)dM = \frac{83nab^4}{480}$.

Il ſuit de tous ces détails qu'on aura ici

$$Z = \frac{16b^2(2b^3 - 3b^2f + f^3)\delta}{3(b^3(2b^3 - 3b^2f + f^3) + 2(aa - bb)(bb - ff)^2)}$$

$$Y = \frac{16a^4(2b^3 - 3b^2f + f^3)\delta'}{3(a^4b(2b^3 - 3b^2f + f^3) - 2a^4(bb - ff)^2 + 2b^4(aa - ff)^2)},$$

& qu'en nommant L & L' les longueurs des deux pendules qui font leurs oscillations dans les mêmes temps que le demi ellipsoïde décrit les angles Z; Y, on aura

$$L = \frac{64(a^2b^5 + 19b^7)p}{60\varpi(b^3(2b^3 - 3b^2f + f^3) + 2(aa - bb)(bb - ff)^2)};$$

$$L' = \frac{83a^4b^5p}{60\varpi(a^4b(2b^3 - 3b^2f + f^3) - 2a^4(bb - ff)^2 + 2b^4(aa - ff)^2)}.$$

Je laisse au lecteur le soin de développer ces formules en détail, & d'en conclure les dimensions du sphéroïde, les plus propres à lui procurer des oscillations douces, par la combinaison la plus avantageuse de leur amplitude avec leur durée; matière curieuse par elle-même; & qui peut avoir des applications fort utiles dans l'arrimage des vaisseaux. Ces discussions nous meneroient trop loin.





SECONDE PARTIE.

ÉLÉMENS D'HYDRAULIQUE.

226. Sous le nom d'Hydraulique on ne comprend, pour l'ordinaire, que la ſcience du mouvement des eaux; mais je prends ici ce mot dans un ſens plus étendu, & j'entends par-là cette partie de la Méchanique qui détermine en général les loix du mouvement des fluides, tant incompreſſibles qu'élaſtiques.

Comme le mouvement des eaux eſt en ce genre l'objet le plus intéreſſant pour les beſoins de la ſociété, il en ſera principalement ici queſtion; mais ce que j'en dirai, s'appliquera également à celui des autres fluides incompreſſibles. Je parlerai briévement du mouvement des fluides élaſtiques.

CHAPITRE PREMIER.

Théorie du mouvement des eaux à leur ſortie des réſervoirs, par des ouvertures.

227. Il eſt évident que ſi l'on connoiſſoit la maſſe, la figure & le nombre des particules d'un fluide en mouvement, la détermination de ce mouvement ſe

réduiroit à un problême ordinaire de Dynamique. Il ne s'agiroit que de trouver le mouvement d'un ſyſtême de petits corps libres qui agiſſent les uns ſur les autres, & qui peuvent encore être ſoumis à l'action de quelques forces extérieures, comme par exemple, à celle de la peſanteur. Mais nous ſommes très-éloignés d'avoir les données néceſſaires pour réſoudre ce problême. D'ailleurs, quand même on les poſſéderoit, on n'en ſeroit guères plus avancé. Comment ſoumettre tant d'efforts à un calcul dont on puiſſe tirer des réſultats ſatisfaiſants? L'Analyſe, du moins dans l'état d'imperfection où elle eſt aujourd'hui, ne permettroit pas d'entreprendre une telle recherche avec quelque apparence de ſuccès.

228. Dans cette impoſſibilité d'établir une théorie directe du mouvement des fluides, il faut chercher quelqu'autre moyen de réſoudre la queſtion. Le plus ſimple & le plus rigoureux conſiſteroit à tirer les loix du mouvement des fluides, comme celles de leur équilibre, d'une ſeule & même loi primordiale, fondée ſur la nature des fluides, ou conſtatée par l'expérience. Nous avons vu (23) que cette loi primordiale, pour l'équilibre, ſe trouve dans l'égalité de preſſion d'une particule quelconque en toutes ſortes de ſens; & nous en avons déduit tous les principes de l'Hydroſtatique. Elle peut de même ſervir de baſe à l'Hydraulique. Car on peut conſidérer à chaque inſtant le mouvement des particules fluides, comme compoſé du mouvement qu'elles avoient dans l'inſtant précédent, & d'un autre

mouvement

mouvement qui a été détruit, & en vertu duquel elles se seroient fait mutuellement équilibre. D'où l'on voit que connoissant cet état d'équilibre par le principe d'égalité de pression; on connoîtra aussi l'état de mouvement, puisque le mouvement au premier instant est toujours censé donné. De grands Géomètres ont représenté d'après cette idée le mouvement des fluides par des formules générales. Malheureusement encore, ces formules sont si composées par la nature de la chose même, qu'on n'en peut tirer aucun secours pour les besoins de la pratique.

229. En examinant la question sous un point de vûe un peu moins étendu, & raisonnant d'après l'expérience, on parviendra à soumettre le mouvement des fluides à des loix, sinon absolument générales, du moins suffisamment exactes pour les problêmes qui se présentent d'ordinaire dans la pratique. Voici comment ce sujet peut être traité.

Soit *MCDN* (Fig. 73) un vase quelconque contenant de l'eau *ACDB* qui s'échappe par l'ouverture *PQ* percée dans le fond *CD*. L'expérience apprend que toutes les particules en se pressant les unes les autres, ont une tendance vers l'orifice. Elles descendent avec des vîtesses sensiblement verticales & égales jusqu'à ce qu'elles soient arrivées à une certaine distance du fond, ou plutôt du plan horisontal qui rase le bord supérieur de l'orifice, distance qu'il est difficile de déterminer exactement, mais que j'ai évaluée à trois ou quatre pouces dans plusieurs expériences. Passé ce terme, les particules qui ne ré- Fig. 73.

pondent pas verticalement à l'orifice, ſe détournent de la direction verticale, & viennent de tous côtés gagner l'orifice ſuivant des directions plus ou moins obliques. Dans notre Figure, les ſections *AB*, *TV*, *RL*, *HE*, *FI*, &c. planes ou courbes, ſont ſuppoſées perpendiculaires aux directions des mêmes particules, c'eſt-à-dire, que les mêmes particules individuelles qui ſont en *AB*, deſcendent ſucceſſivement en *TV*, *RL*, *HE*, *FI*, &c. Il eſt viſible que lorſque le vaſe eſt entretenu conſtamment plein à la même hauteur au-deſſus du fond par de nouvelle eau qui remplace celle qui ſort, & que l'écoulement a pris un cours régulier & permanent, les ſections *AB*, *TV*, &c doivent toujours être les mêmes. Car aux mêmes endroits les particules ont les mêmes vîteſſes, tant en direction qu'en quantité. Mais ſi la hauteur du fluide dans le réſervoir augmente ou diminue, les ſections dont il s'agit doivent ſubir quelque changement de nature, parce que les vîteſſes ne ſont plus les mêmes aux mêmes endroits. L'extrême mobilité des particules, & l'égale facilité avec laquelle elles obéiſſent à la peſanteur, produiſent entr'elles un équilibre d'efforts & un arrangement tels que malgré la tendance univerſelle vers l'orifice, la ſurface ſupérieure du fluide demeure toujours horiſontale, du moins juſqu'à une très-petite diſtance de l'orifice, comme on le verra ci-deſſous, lorſque je rapporterai en détail les expériences que j'ai faites ſur les écoulemens des fluides.

Fig. 74. 230. Il en eſt de même lorſque le fluide ſort par

une ouverture latérale (Fig. 74). Toutes les particules descendent d'abord verticalement, puis se dirigent vers l'ouverture; & la surface supérieure demeure toujours horisontale. Seulement on doit observer ici que si l'orifice latéral PQ a une hauteur sensible par rapport à celle de l'eau dans le réservoir, toutes les particules n'ont pas la même vîtesse, & qu'à raison d'une plus grande profondeur, elles se meuvent plus vîte vers le bas que vers le haut de l'orifice; au lieu que dans les écoulemens par des orifices horisontaux, il ne peut pas y avoir dans la vîtesse des particules, d'inégalité qui soit produite par une inégalité de profondeur dans les différens points de l'orifice.

231. Que l'orifice par lequel le fluide s'échappe, soit horisontal ou latéral : comme les particules qui ne répondent pas verticalement à l'orifice s'y dirigent néanmoins avec des mouvemens plus ou moins obliques, il est clair qu'elles tendent à conserver ces mouvemens, & que par conséquent la veine fluide, au sortir de PQ, doit se resserrer dans une certaine étendue Pp, & former ainsi une espèce de pyramyde tronquée $PQqp$, dont la plus petite base pq répond à l'endroit où la veine cesse de se resserrer pour commencer à prendre la forme prismatique. Il est essentiel d'avoir égard à cette *contraction de la veine fluide*, pour mesurer exactement les dépenses des réservoirs par des orifices proposés. Elle est très-sensible dans les écoulemens qui se font par des orifices percés dans de minces parois. Car on voit la veine se resserrer considérablement au sortir de l'ori-

fice, & on trouve, comme l'expérience nous l'apprendra ci-dessous, que l'aire de l'orifice PQ est à l'aire de la section pq, dans un rapport qui diffère très-peu de celui de 8 à 5. La section pq est distante de PQ d'une quantité à peu près égale au raïon de l'orifice PQ. Dans les écoulemens par des bouts de tuyaux cylindriques, adaptés au réservoir, dénués de transparence, & assez longs pour que l'eau en suive les parois & sorte à gueule-bée, la contraction de la veine fluide ne se manifeste pas aux yeux; mais elle n'en existe pas moins à l'entrée de ces mêmes tuyaux. Elle y produit seulement un effet moins sensible que dans le premier cas; car alors la dépense diminue seulement dans le rapport de 8 à $6\frac{1}{2}$, à peu près; au lieu que dans le premier cas elle diminue dans le rapport de 8 à 5, à peu près. Tout cela sera pleinement éclairci par la voie de l'expérience. Ici où il n'est question que de la théorie des écoulemens, je suppose qu'on ait diminué l'orifice dans le rapport que demande la contraction; & je regarde l'orifice corrigé de cette manière, comme celui par lequel se fait l'écoulement. Ainsi lorsque l'eau sort par un orifice percé dans une mince paroi, & dont l'aire $= A$, l'orifice corrigé & employé dans le calcul $= \frac{5}{8} A$; & lorsque l'eau sort à gueule-bée par un tuyau additionnel dont la base $= A$, l'orifice rectifié $= \frac{13}{16} A$. Quant à la hauteur de l'eau dans le réservoir, elle doit être comptée, dans le premier cas, depuis la surface du fluide jusqu'au point où la veine cesse de se resserrer; & dans le second, depuis

la surface du fluide jusqu'à l'ouverture extérieure du tuyau additionnel.

232. Cela posé, soit comme dans les articles 229 & 230 un vase *MCDN* qui donne de l'eau par l'ouverture *PQ*, horisontale ou latérale. On raisonneroit d'une manière analogue pour un tuyau additionnel. Imaginons la liqueur *ACDB* partagée en une infinité de tranches égales *ABba*, *TVut*, *RLlr*, &c. par des surfaces (planes ou courbes) infiniment voisines & perpendiculaires aux directions des particules du fluide. Soit *pqgf* le petit prisme de liqueur qui sort pendant l'instant que la surface *AB* s'abaisse en *ab*, la surface *TV* en *tu*, &c. Il est clair que ce prisme est égal à chacune des tranches *ABba*, *TVut*, &c. Car à mesure qu'il sort du vase, il est nécessairement remplacé de proche en proche par un prisme égal, ou par une tranche égale; autrement il se formeroit des vuides entre les particules fluides, ce qui est incompatible avec leur extrême mobilité. Nommons *B* l'aire de la base *TV* de l'une quelconque des tranches proposées; *C* l'aire *pq*; *x* la hauteur du prisme qui ayant l'aire *B* pour base est égal à la tranche *TVut*; *y* la hauteur du prisme *pqgf*: on aura l'équation $Bx = Cy$; d'où l'on tire $x : y :: C : B$. Or puisque la surface *TV* s'abaisse en *tu*, dans le même temps que la surface *pq* s'abaisse en *fg*, il est évident que *x* & *y* représentent les vîtesses *moyennes* des deux tranches *TVut*, *pqgf*. Ainsi on doit conclure que *la vîtesse moyenne d'une tranche quelconque, prise dans l'intérieur du fluide, est à*

la vîtesse de la liqueur à la sortie de l'orifice, ~~réciproquement~~ comme l'aire de l'orifice est à l'aire de l'une des bases de la tranche proposée.

233. Il suit de-là que si l'orifice est infiniment petit par rapport aux bases de chacune des tranches égales dans lesquelles on a supposé que la liqueur étoit partagée, la vîtesse moyenne de la liqueur à la sortie de l'orifice sera infinie par rapport aux vîtesses moyennes des différentes tranches intérieures; ou plutôt comme il n'existe pas de vîtesse infinie dans la nature, la vîtesse de la liqueur à la sortie de l'orifice sera finie, & les vîtesses moyennes des tranches intérieures seront infiniment petites.

Dans l'application que nous allons faire de ces principes, nous regardons les vases où les fluides sont contenus, comme solides & conservant toujours leur même figure.

SECTION I.

Du mouvement des eaux qui sortent par des ouvertures, de vases entretenus constamment pleins.

234. Si la perte d'eau que fait un réservoir par un orifice n'étoit pas réparée à chaque instant, la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice diminueroit sans cesse. Ici nous supposons que cette hauteur demeure constamment la même, & que par consé-

quent le réservoir reçoit par en haut ou par une affusion latérale, précisément autant d'eau qu'il en dépense par l'orifice. Il est absolument indifférent que l'eau provisionnelle entre d'une manière ou d'autre dans le réservoir, pourvu qu'elle ne cause pas d'ébranlement sensible à la masse des eaux intérieures.

235. Avant que d'entamer notre sujet, rappellons-nous d'abord quelques propositions démontrées dans tous les traités sur l'accélération des graves, & en particulier dans mes Elémens de Dynamique, qu'on peut consulter.

1°. *Si un corps tombe librement par sa pesanteur, la vîtesse qu'il aura au dernier instant de sa chûte, sera proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur parcourue.*

2°. *Dans la même hypothèse, le temps est comme la vîtesse, & par conséquent proportionnel aussi à la racine quarrée de la hauteur parcourue.*

3°. *Si le corps proposé après être tombé d'une certaine hauteur se mouvoit uniformément avec la vîtesse qu'il a au dernier instant de sa chûte, il parcourroit un espace double de celui qu'il a parcouru en descendant, dans le même temps qu'il a employé à descendre.*

4°. *Si un corps soumis à l'action de la pesanteur est lancé en haut suivant la verticale avec une vîtesse initiale, égale à celle qu'il auroit acquise en tombant librement par sa gravité d'une certaine hauteur, il montera à cette hauteur dans le même temps qu'il auroit mis à descendre, & au moment qu'il y arrivera, sa*

vîtesse initiale aura été totalement détruite par l'action continue & contraire de la pesanteur.

PROPOSITION I.

Fig. 75 & 76. 236. *Les volumes* pqgf, iktz (Fig. 75 & 76) *de liqueurs (de même ou de différente espèce) qui sortent en même temps & avec des vîtesses uniformes, des vases* MCDN, EGHF, *par les orifices* pq, ik, *sont entr'eux comme les produits des orifices par les vîtesses des écoulemens.*

Cela est clair de soi-même; car les prismes *pqgf*, *iktz* sont les produits de leurs bases *pq*, *ik* par leurs hauteurs *pf*, *iz* qui sont parcourues (hyp.) en temps égaux, & qui représentent par conséquent les vîtesses des liqueurs à leur sortie des orifices *pq*, *ik*.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que lorsque les fluides sont de même espèce, & ont par conséquent leurs masses proportionnelles à leurs volumes (10); on peut dire également que les masses qui sortent en temps égaux, sont entr'elles comme les produits des orifices par les vîtesses des écoulemens.

PROPOSITION II.

Fig. 75. 237. *La vîtesse d'une liqueur, à sa sortie d'un réservoir quelconque* MCDN (Fig. 75) *par un orifice infiniment petit* pq, *est égale à celle qu'acquerroit un corps pesant en tombant de la hauteur verticale & constante* hq *de la surface supérieure* AB *du fluide au-dessus de l'orifice* pq.

DÉMONSTRATION.

Imaginons la liqueur $ACDB$ partagée en une infinité de tranches égales par des ſurfaces perpendiculaires aux directions des mêmes particules : les vîteſſes moyennes des tranches intérieures ſeront infiniment petites par rapport à la vîteſſe de la liqueur au ſortir de l'orifice pq (253). Or, par la théorie de la chûte des graves, ſi toutes les molécules fluides étoient abandonnées à l'action libre de leur peſanteur propre, elles deſcendroient avec la même vîteſſe. Ainſi, puiſque les tranches ſupérieures à l'orifice perdent la vîteſſe qu'elles auroient naturellement par la peſanteur, il eſt clair que le petit priſme fluide $pqgf$ qui ſort à chaque inſtant, eſt preſſé ou pouſſé par la liqueur ſupérieure, de la même manière que ſeroit preſſé un bouchon ou un tampon qu'on mettroit à l'orifice pour empêcher l'écoulement. Par conſéquent, en nommant ϖ la peſanteur ſpécifique ou la denſité du fluide, la force motrice qui chaſſe le priſme $pqgf$, pourra être repréſentée par $\varpi \times hq \times pq$, (39).

Concevons que durant l'inſtant que la preſſion $\varpi \times hq \times pq$ fait ſortir le priſme $pqgf$, la peſanteur abſolue ſeule d'un priſme $pqxy$, laquelle peut s'exprimer par $\varpi \times pq \times qx$, fît parcourir la petite hauteur qx à ce même priſme $pqxy$ regardé comme immobile au commencement de ſon mouvement. Cela poſé, il eſt clair que les forces motrices $\varpi \times hq \times pq$, $\varpi \times qx \times pq$ étant proportionnelles aux quantités de mouvement

qu'elles produiſent, ſi l'on nomme V & u les vîteſſes qu'elles impriment aux maſſes $pqgf$, $pqxy$, on aura $\varpi \times hq \times pq : \varpi \times qx \times pq :: pqgf \times V : pqxy \times u$, ou (236), $\varpi \times hq \times pq : \varpi \times qx \times pq :: pq \times V \times V : pq \times u \times u$, & par conſéquent $hq : qx :: V^2 : u^2$, ou bien $hq : V^2 :: qx : u^2$. Soit v la vîteſſe qu'acquerroit un corps grave en tombant de la hauteur hq : on aura (235 n°. 1), $qx : u^2 :: hq : v^2$. Donc par une ſuite de rapports égaux, $hq : V^2 :: hq : v^2$, & par conſéquent $V^2 = v^2$, ou $V = v$. D'où l'on voit que la vîteſſe V du fluide au ſortir de l'orifice eſt égale à celle v qu'un corps peſant acquerroit en tombant de la hauteur hq du fluide dans le réſervoir. C. Q. F. D.

On peut abréger l'énoncé de la propoſition, en diſant que la vîteſſe du fluide à l'orifice pq eſt *dûe à la hauteur* hq. Je me ſervirai pour l'ordinaire de cette expreſſion qui eſt fort uſitée. Réciproquement lorſque je dirai qu'une certaine hauteur eſt dûe à une vîteſſe, cela ſignifiera que cette vîteſſe eſt égale à celle qu'un corps grave acquerroit en tombant de la hauteur en queſtion.

COROLLAIRE I.

238. Il eſt viſible que la même propoſition a lieu pour un orifice latéral infiniment petit; car la preſſion du fluide eſt égale en toutes ſortes de ſens, & doit par conſéquent produire la même vîteſſe à la ſortie de deux orifices très-petits, l'un horiſontal, l'autre latéral, pourvu que ces deux orifices ſoient

placés à la même distance de la surface supérieure de l'eau.

COROLLAIRE II.

239. La liqueur au sortir de l'orifice a une vîtesse capable de la faire remonter à une hauteur égale à la distance verticale de l'orifice à la surface du fluide, de la même manière qu'un corps en tombant par sa pesanteur d'une certaine hauteur, acquiert une vîtesse capable de le faire remonter à cette hauteur (235, n°. 4).

COROLLAIRE III.

240. Puisque la vîtesse de la liqueur au sortir de l'orifice est la même que celle qui seroit produite par la chûte verticale *hq*, il est clair (235, n°. 3) que si cette vîtesse étoit continuée uniformément, la liqueur parcourroit un espace égal à 2 *hq*, dans le même temps qu'un corps pesant employeroit à tomber de la hauteur *hq*.

COROLLAIRE IV.

241. Soient *hq*, *lk* les hauteurs des liqueurs *ACDB*, *OGHP* (Fig. 75 & 76.) au-dessus des petits orifices *pq*, *ik* égaux ou non par lesquels elles sortent ; *V* & *v* les vîtesses des écoulemens. Comme chacune de ces vîtesses, quelle que soit la nature du fluide, est représentée par la racine quarrée de la hauteur du fluide qui lui correspond (237 & 235 n°. 1), on aura en général $V : v :: \sqrt{hq} : \sqrt{lk}$. Fig. 75 & 76.

C'est-à-dire que les vîtesses avec lesquelles deux liqueurs de même espèce ou non s'échappent par de petits orifices, sont entr'elles, comme les racines quarrées des hauteurs de ces liqueurs dans les deux réservoirs.

On voit par-là que l'Auteur de l'Architecture Hydraulique se trompe (tom. 1, pag. 187), lorsqu'il dit que les vîtesses de deux liqueurs différentes, telles que du mercure & de l'eau, sont entr'elles comme les racines quarrées des produits des hauteurs par les pesanteurs spécifiques. Si cet Auteur avoit remarqué dans l'exemple qu'il donne (n°. 490), qu'à la vérité la colonne qui chasse le mercure hors de l'un des vases est quatorze fois aussi pesante que la colonne qui chasse l'eau hors de l'autre vase, mais qu'aussi la masse chassée dans le premier cas est quatorze fois aussi grande que la masse chassée dans le second, il auroit vu sans peine que la vîtesse doit être la même dans les deux cas. En général il est évident que lorsque les forces motrices sont proportionnelles aux masses qu'elles mettent en mouvement, les vîtesses sont égales.

Je suppose toujours que les deux vases sont placés dans un même endroit, ou du moins à la même latitude sensiblement. Mais si, par exemple, l'un étoit placé au pole & l'autre à l'équateur, les vîtesses seroient entr'elles comme les racines quarrées des produits des hauteurs par les pesanteurs au pole & à l'équateur. Ces pesanteurs peuvent s'exprimer par les nombres 289 & 288 respectivement (19). Je ne

fais cette remarque qu'en paſſant ; elle n'aura pas d'application dans la ſuite.

Scholie I.

242. Le raiſonnement que nous avons fait (237) pour déterminer les vîteſſes des écoulemens, eſt fondé ſur ce principe, que la liqueur au ſortir de l'orifice eſt chaſſée par le poids *entier* de la colonne correſpondante, & ſuppoſe par conſéquent que l'orifice eſt infiniment petit. Cependant la plûpart des Auteurs élémentaires qui en cela ont preſque tous copié M. Varignon, avancent que la liqueur au ſortir d'un orifice horiſontal eſt chaſſée par le poids de la colonne ſupérieure, ſans limiter la grandeur de l'orifice. Il eſt évident que la propoſition n'eſt pas vraie en général. Car ſi l'on a, par exemple, un vaſe cylindrique vertical rempli d'eau, & qu'on imagine que tout d'un coup le fond ſoit anéanti, la tranche du fond ne ſouffrira aucune action des tranches ſupérieures, & elles deſcendront toutes avec la même vîteſſe, ſuivant les loix de la chûte des graves. La tranche du fond ne porte le poids total de la colonne ſupérieure, que quand les tranches ſupérieures perdent leurs vîteſſes, & que conſéquemment l'orifice eſt infiniment petit (232 & 233).

Il eſt néanmoins eſſentiel de remarquer que ſi un orifice horiſontal, quoique fini eſt petit en comparaiſon de la largeur du réſervoir, que par exemple, le rapport de la première ſurface à la ſeconde n'excède guères celui de 1 à 20, la vîteſſe du fluide à

la ſortie de l'orifice eſt ſenſiblement la même que ſi cet orifice étoit infiniment petit. Mais alors cette vîteſſe n'eſt pas produite toute entière par la preſſion de la colonne ſupérieure. Chaque particule obéit à-la-fois à ſa peſanteur propre & à l'action des particules contigues, action qui eſt ſans ceſſe favoriſée ou contredite par leur adhérence réciproque. Or on conçoit, ſans qu'il ſoit peut-être poſſible de le démontrer en rigueur, que toutes ces forces peuvent tellement ſe combiner entr'elles, que la vîteſſe de la liqueur au ſortir de l'orifice ſoit la même que ſi elle étoit produite par le poids de la colonne ſupérieure. La choſe eſt du moins indubitable par l'expérience. Seulement on obſerve que ſi l'orifice eſt un peu conſidérable, la vîteſſe n'acquiert ſa plénitude uniforme & permanente qu'au bout d'un certain temps; car on trouve alors que la quantité de liqueur qui ſort pendant les 3 ou 4 premières ſecondes de l'écoulement eſt un peu moindre que celle qui ſort pendant trois ou quatre autres ſecondes de la ſuite du temps. Plus l'orifice eſt grand, plus cette inégalité ſe fait appercevoir.

SCHOLIE II.

243. Dans la pratique, les eaux ſortent ſouvent par des ouvertures latérales qui, quoique petites en comparaiſon des amplitudes horiſontales des réſervoirs, ne peuvent pas cependant être cenſées avoir tous leurs points à égales diſtances de la ſurface du fluide. Alors voici la manière dont on détermine

ordinairement les vîtesses des différens points de l'eau à ces ouvertures.

Imaginons qu'un orifice de ce genre soit bouché par une plaque de même grandeur que lui. Supposons ensuite que cette plaque soit percée de petits trous par lesquels il sorte de la liqueur. En regardant chaque trou comme un orifice particulier, la vîtesse à la sortie d'un trou quelconque sera égale à celle qu'acquerroit un corps pesant en tombant de la hauteur de la surface de l'eau au-dessus du même trou (237). Maintenant, qu'on multiplie à l'infini le nombre des trous, de manière que leur somme devienne égale à l'orifice proposé : les vîtesses seront toujours telles que nous venons de le dire. Lorsqu'il s'agira donc de déterminer la quantité de liqueur qui sort pendant un temps donné, il faudra avoir égard à cette inégalité de vîtesses, & opérer comme nous l'expliquerons ci-dessous.

On ne peut pas se dissimuler que le raisonnement sur lequel est fondée la détermination dont il s'agit, n'est point démonstratif. Tant que la somme des petits trous percés dans la plaque substituée à l'orifice, est fort petite en comparaison de l'amplitude du réservoir, les portions de liqueur qui sortent par chaque trou, sont chassées par les poids absolus des colonnes correspondantes, & l'écoulement se fait comme dans l'article 237. Mais du moment que le nombre des trous augmente à l'infini, & que les filets deviennent contigus les uns aux autres, on ne voit pas clairement qu'ils doivent sortir de la

même manière qu'ils ſortiroient par de petits trous iſolés. Le parti le plus ſûr eſt donc alors de conſulter l'expérience qui apprend qu'en effet le mouvement eſt à peu près le même dans les deux cas, du moins lorſque l'ouverture latérale n'eſt pas fort grande par rapport à l'amplitude du réſervoir.

PROPOSITION III. PROBLEME.

Fig. 75. 244. *Trouver une équation qui exprime la relation entre la quantité de liqueur qui ſort du réſervoir quelconque* MCDN (Fig. 75.) *par le petit orifice* pq *horiſontal ou latéral, le temps de l'écoulement & la hauteur du fluide dans le réſervoir?*

On voit que dans le cas où l'ouverture eſt latérale, elle doit être ſi petite, ou tellement poſée, que tous ſes points puiſſent être cenſés à la même diſtance de la ſurface de l'eau.

SOLUTION.

Nommons K l'aire de l'orifice pq, t le temps de l'écoulement, h la hauteur conſtante hq de l'eau dans le réſervoir, Q la quantité d'eau écoulée pendant le temps t, θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber d'une hauteur donnée a. Il eſt clair (235, n°. 2) que ſi l'on fait cette proportion $\sqrt{a} : \sqrt{h} :: \theta$: un quatrième terme; ce quatrième terme $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ eſt le temps qu'un corps peſant mettroit à tomber de la hauteur h. Or durant ce même temps il doit ſortir une colonne fluide qui a l'aire K pour baſe,

baſe, & $2h$ pour hauteur (240), puiſque la hauteur h eſt conſtante, & que par conſéquent la vîteſſe au ſortir de l'orifice eſt uniforme. Ainſi la colonne ou quantité de fluide qui ſort pendant le temps $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ eſt exprimée par $2Kh$. Il n'eſt pas moins clair que les quantités de fluide qui ſortent pendant les temps $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ & t, ſont entr'elles comme ces temps. On aura donc $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}} : t :: 2Kh : Q$, & par conſéquent $\theta Q = 2tK\sqrt{ah}$, formule qui contient la relation demandée. C. Q. F. T.

Des ſix quantités que cette formule renferme, deux, ſçavoir θ & a, ſont toujours conſtantes ; & nous ſuppoſerons, d'après l'expérience, que a étant de 15 pieds 1 pouce, $\theta = 1$ ſeconde. Mais les quatre autres K, t, h, Q peuvent varier, & on voit que trois d'entr'elles étant données, on connoîtra la quatrième. De-là ſuit la ſolution des queſtions ſuivantes.

245. QUESTION I. *Connoiſſant l'aire* K *de l'orifice, le temps* t *de l'écoulement, la hauteur* h *du réſervoir, trouver la quantité* Q *d'eau écoulée ?*

Cette queſtion ſe réſoud par l'équation $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$.

Par exemple, ſuppoſons que la hauteur h de l'eau dans le réſervoir ſoit de 12 pieds, que l'orifice ſuppoſé circulaire ait un pouce de diamètre, & que

l'écoulement dure 1 minute. En mettant ces données dans l'équation précédente ; mettant auſſi pour a, 15 pieds 1 pouce, & pour θ, 1 ſeconde : on trouvera Q = 15216 pouces cubes à très-peu près. Si l'on veut connoître le poids de cette quantité d'eau, on fera la proportion, 1728 pouces cubes ſont à 15216 pouces cubes, comme 70 livres poids du pied cube d'eau douce ou de 1728 pouces cubes, ſont au poids cherché qu'on trouvera de 616 livres environ.

246. QUESTION II. *Connoiſſant la hauteur* h *du réſervoir, le temps* t *de l'écoulement, la quantité* Q *d'eau écoulée, trouver l'aire* K *de l'orifice ?*

Cette queſtion ſe réſoud par l'équation $K = \frac{\theta Q}{2t\sqrt{ha}}$.

Si l'orifice doit être un cercle dont on demande le raïon, il eſt clair que ce raïon $= \sqrt{\left[\frac{\theta Q}{2t\sqrt{ha}} \times \frac{113}{355}\right]}$, expreſſion dans laquelle $\frac{113}{355}$ eſt le rapport du diamètre à la circonférence.

Par exemple, ſoient $t = 1$ minute, Q = 8 pieds cubes ou 13824 pouces cubes, $h = 9$ pieds : on trouvera $K = 0,82396$ pouces quarrés. Dans le cas où cet orifice ſeroit un cercle, on trouveroit ſon raïon $= 6\frac{1}{10}$ lignes environ.

247. QUESTION III. *Connoiſſant la hauteur* h *du réſervoir, l'aire* K *de l'orifice, la quantité* Q *d'eau écoulée, trouver le temps* t *de l'écoulement ?*

Cette queſtion ſe réſoud par l'équation $t = \frac{\theta Q}{2K\sqrt{ha}}$.

Par exemple, ſuppoſons $h = 9$ pieds, $K = 1$ pouce quarré, $Q = 40000$ pouces cubes : on trouvera $t = 143, 05$ ſecondes = 2 minutes 23 ſecondes à-peu-près.

La même méthode ſert à réſoudre le problême ſuivant. *Suppoſons qu'il ſe faſſe ſubitement un vuide dans l'intérieur d'un canon, en vertu de l'exploſion de la poudre qui chaſſe le boulet; on demande le temps que l'air mettra à rentrer dans le canon, & à en parcourir la longueur.* Il eſt clair que la preſſion de l'atmoſphère qui fait rentrer l'air dans le canon, étant équivalente à celle d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur (75), ou à celle d'une colonne d'air uniforme de 32 fois 850 pieds de hauteur (81), on n'aura qu'à faire $h = 27200$ pieds, $Q = K \times L$, L étant la longueur du canon, pour avoir l'équation $t = \frac{\theta L}{2\sqrt{ha}}$ qui eſt celle du problême. Si par exemple, $L = 16$ pieds, on trouve $t = \frac{3}{4}$ tierce environ. Je néglige, comme de nulle conſidération, la petite quantité d'air qui rentre par la lumière, & la petite variation que le reſſort de ce fluide ſubit en parcourant l'eſpace L.

248. QUESTION IV. *Connoiſſant la quantité* Q *d'eau écoulée, l'aire* K *de l'orifice, le temps* t *de l'écoulement, trouver la hauteur* h *du réſervoir?*

Cette queſtion ſe réſoud par l'équation $h = \frac{Q^2 \theta^2}{4at^2 K^2}$.

Par exemple, ſoient $Q = 40000$ pouces cubes, $K = 1$ pouce quarré, $t = 4$ minutes $= 240$ ſecondes : on trouvera $h = 3$ pieds 2 pouces $4\frac{2}{5}$ lignes.

PROPOSITION IV. PROBLEME.

249. *Expoſer en général la manière de déterminer les écoulemens par des ouvertures latérales dont tous les points ne peuvent pas être ſuppoſés également diſtans de la ſurface du fluide ?*

SOLUTION.

Nous avons vu (243) que dans les écoulemens dont il s'agit, la vîteſſe de chaque point de l'orifice peut être ſuppoſée égale à celle qu'acquerroit un corps grave en tombant de la hauteur du fluide, correſpondante à ce point. D'après ce principe, ou plutôt cette hypothèſe que nous examinerons dans la ſuite par la voie de l'expérience, on imaginera que l'orifice propoſé eſt partagé en une infinité de rectangles ou de trapèzes par des plans horiſontaux; & regardant chacun de ces trapèzes élémentaires, comme un orifice particulier, dont tous les points peuvent être ſuppoſés également diſtans de la ſurface du fluide, on déterminera (244 & 245) la quantité de liqueur qu'il doit fournir pendant un temps donné. Enſuite il ne s'agira plus que de trouver la ſomme de toutes ces quantités élémentaires de fluide, pour avoir la quantité totale que l'orifice entier doit donner pendant le même temps. C. Q. F. T.

Cette ſolution générale va s'éclaircir par des exemples.

Proposition V. Probleme.

250. *Déterminer l'écoulement par un oriſice rectangulaire vertical* LNOM *pratiqué dans l'une des parois du vaſe quelconque* A B C D E F G H (Fig. 77) ? Fig. 77.

Solution.

Soient menées, parallèlement aux baſes oppoſées & horiſontales LM, NO de l'orifice, les droites infiniment voiſines XZ, xz qui déterminent le rectangle élémentaire $XZzx$ de la ſurface de l'orifice. En conſidérant ce petit rectangle comme un orifice particulier; élevant par un point quelconque R de la baſe NO une verticale RV qui rencontre XZ en I, & qui ſe termine en V à la ſurface du fluide; & nommant t le temps de l'écoulement, θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a: il eſt évident (244) que la quantité de liqueur qui ſortira par l'orifice $XZzx$, pendant le temps t, ſera exprimée par $\frac{t\sqrt{a}}{\theta} \times 2\,XZ \times Ii \times \sqrt{VI}$. La queſtion eſt de trouver la ſomme de toutes ces quantités élémentaires d'eau, afin d'avoir la quantité totale qui s'écoule par l'orifice fini $LNOM$.

Pour cela, ſur VR comme axe & avec un paramètre quadruple de VR, ſoit conſtruite la parabole VYT. Ayant prolongé les droites KM, IZ, iz

jusqu'en Y, S, s, le petit trapèze parabolique $ISsi$ sera exprimé par $Ii \times IS$. Or, par la propriété de la parabole, $\overline{IS}^2 = VI \times 4VR$. Donc $Ii \times IS = 2Ii \times \sqrt{(VI \times VR)}$. Multipliant cette expression du trapèze $ISsi$ par la quantité constante $\frac{t\sqrt{a}}{\theta} \times \frac{XZ}{\sqrt{VR}}$, le produit $\frac{t\sqrt{a}}{\theta} \times 2XZ \times Ii \times \sqrt{VI}$ représentera la quantité de liqueur écoulée par l'orifice $XZzx$ pendant le temps t. Par conséquent la quantité totale de liqueur qui sort par l'orifice $LNOM$ pendant le même temps, est égale au produit de l'aire parabolique $KRTSY$ par la quantité constante $\frac{t\sqrt{a}}{\theta} \times \frac{XZ}{\sqrt{VR}}$. Ainsi faisant la quantité totale de liqueur écoulée $= Q$, $VR = H$, $VK = h$, $LM = f$; & considérant que l'aire parabolique $VRT = \frac{2}{3} VR \times RT = \frac{4}{3} H^2$, que pareillement l'aire $VKY = \frac{2}{3} VK \times KY = \frac{4}{3} h \sqrt{Hh}$: on aura $Q = \frac{4tf(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})\sqrt{a}}{3\theta}$, ou bien $3\theta Q = 4tf(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})\sqrt{a}$, équation qui contient toutes les quantités relatives à l'écoulement proposé. C. Q. F. T.

On voit que parmi les sept quantités que cette équation renferme, θ & a sont constantes, mais que les cinq autres Q, H, h, f, t peuvent varier; ce qui fournit la solution de questions analogues à celles des articles 245, 246, 247, 248. Je n'entre pas dans ce nouveau détail.

COROLLAIRE.

251. Soit nommée x la hauteur *moyenne* de l'eau au-dessus de l'orifice, c'est-à-dire une hauteur telle que si tous les filets d'eau sortoient avec une seule & même vîtesse égale à celle que peut acquérir un corps grave en tombant de la hauteur x, il s'écoulât pendant le temps t la même quantité d'eau qu'il s'en écoule avec les vîtesses naturelles dans l'hypothèse du problême : on aura (245), $Q = \frac{2tf(H-h)\sqrt{ax}}{\theta}$. Egalant entr'elles les deux valeurs de Q, & dégageant x, on trouvera

$$x = \frac{4(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})^2}{9(H-h)^2}.$$

Cette hauteur moyenne diffère de la verticale qu'on éleveroit du centre de gravité de l'orifice $LNOM$ à la surface de l'eau, & qui auroit par conséquent pour valeur, $\frac{H+h}{2}$. Mais plus la surface de l'eau est élevée au-dessus de la base supérieure LM de l'orifice (toutes choses d'ailleurs égales), plus la différence dont il s'agit diminue. En effet, à mesure que VK augmente, tout le reste demeurant le même, l'arc YST approche de plus en plus d'une ligne droite, & le segment parabolique $KRTSY$ d'un trapèze rectiligne. Or si le segment parabolique devenoit réellement un trapèze rectiligne, l'ordonnée moyenne ou la vîtesse moyenne de l'eau répondroit au milieu de KR. Donc aussi la hauteur moyenne répondroit au même point.

PROPOSITION VI. PROBLEME.

Fig. 78. 252. *Déterminer l'écoulement par l'orifice vertical* LNM *formé en triangle isocèle dont la base LM est horisontale, & pratiqué dans l'une des parois d'un vase quelconque* ABCDEFGH (Fig. 78)?

SOLUTION.

En nommant t le temps de l'écoulement, Q la quantité d'eau écoulée, H la hauteur VR de la surface de l'eau au-dessus de la base LM de l'orifice, h la hauteur VN de l'eau au-dessus du sommet N du triangle, c la base LM de ce même triangle, θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a: je trouve l'équation

$$15\theta(H-h)Q = 4ct(2h^2\sqrt{h} + 3H^2\sqrt{H} - 5Hh\sqrt{H})\sqrt{a},$$

qui résoud le problême. C. Q. F. T.

Comme il seroit trop long de démontrer cette formule par la Géométrie élémentaire, je supprime ce détail. Les lecteurs instruits des premiers principes du calcul intégral, reconnoîtront sans peine la vérité de cette même formule que j'ai cru devoir rapporter ici pour fixer une hauteur moyenne qui soit d'un usage commode dans la pratique, comme on va voir.

COROLLAIRE.

253. Soit x la hauteur moyenne de l'eau au-dessus de l'orifice; on aura (245), $Q = \frac{ct(H-h)\sqrt{ax}}{\theta}$.

Egalant entr'elles les deux valeurs de Q, & dégageant x, on trouvera

$$x = \frac{16(2h^2\sqrt{h} + 3H^2\sqrt{H} - 5Hh\sqrt{H})^2}{225(H-h)^4}.$$

Pour ſçavoir ſi cette hauteur diffère beaucoup de la diſtance du centre de gravité de l'orifice à la ſurface de l'eau, examinons la différence de ces deux lignes dans le cas où elles diffèrent le plus, dans celui où $h = 0$. On trouvera alors $x = \frac{144}{225}H$; & comme la diſtance du centre de gravité de l'orifice à la ſurface de l'eau $= \frac{2}{3}H$ dans cette même hypothèſe, on voit que la première ligne eſt moindre que la ſeconde de $\frac{2}{25}H$ ſeulement. Ainſi lorſque dans la pratique la ſurface de l'eau eſt élevée ſenſiblement au-deſſus du ſommet de l'orifice, on peut prendre pour hauteur moyenne la diſtance du centre de gravité de l'orifice à la ſurface de l'eau.

PROPOSITION VII. PROBLEME.

254. *Déterminer l'écoulement par un orifice vertical, formé en triangle iſocèle dont la pointe* N *eſt en bas & la baſe* LM *horiſontale, pratiqué dans l'une des parois du réſervoir* ABCDEFGH (Fig. 79)? Fig. 79.

SOLUTION.

Soient nommés t le temps de l'écoulement, Q la quantité d'eau écoulée, H la hauteur NV de l'eau au-deſſus du ſommet de l'orifice, h la hauteur VR de l'eau au-deſſus de la baſe du triangle, c la baſe LM,

θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a : je trouve l'équation

$$15\theta(H-h)Q = 4ct(2H^2\sqrt{H}+3h^2\sqrt{h}-5Hh\sqrt{h})\sqrt{a}$$

qui résoud ce problême. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

255. Soit x la hauteur moyenne de l'eau au-dessus de l'orifice ; on aura (245) $Q = \frac{tc(H-h)\sqrt{ax}}{\theta}$. Egalant entr'elles les deux valeurs de Q, on trouvera

$$x = \frac{16(2H^2\sqrt{H}+3h^2\sqrt{h}-5Hh\sqrt{h})^2}{225(H-h)^4}.$$

Lorsque $h = 0$, la valeur de x est moindre de $\frac{11H}{225}$ que la distance du centre de gravité du triangle à la surface de l'eau.

PROPOSITION VIII. PROBLEME.

Fig. 80. 256. *Déterminer l'écoulement par un orifice vertical & circulaire* LMNP, *pratiqué dans l'une des parois du vase* ABCDEFGH (Fig. 80)?

SOLUTION.

Nommons t le temps de l'écoulement, Q la quantité d'eau écoulée, θ le temps qu'un grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a, r le raïon OL de l'orifice, $\frac{\Pi}{1}$ le rapport de la circonférence au

diamètre, $\frac{n}{1}$ le rapport de la hauteur *VO* de la surface de l'eau au-dessus du centre *O*, au raïon *OL*, ensorte que $VO = nr$: je trouve l'équation

$$Q = \frac{2\Pi t r^2 \sqrt{(anr)}}{\theta}\left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \&c\right)$$

qui résoud le problême. C. Q. F. T.

Cette série est si convergente, que pour peu que *VO* surpasse *OL*, il sera plus que suffisant d'employer ses trois premiers termes dans la pratique.

COROLLAIRE.

257. Soit x la hauteur moyenne de l'eau au-dessus de l'orifice; on aura (245) $Q = \frac{2t\Pi r^2 \sqrt{ax}}{\theta}$. Egalant entr'elles les deux valeurs de Q, on trouvera

$$x = nr\left(1 - \frac{1}{16n^2} - \frac{9}{1024n^4} - \&c\right).$$

On voit que la hauteur moyenne x est moindre que *VO*. Lorsque n surpasse sensiblement l'unité, ces deux lignes peuvent être regardées comme égales.

REMARQUE I.

258. Quand la surface de l'eau affleure l'extrémité supérieure *L* du diamètre *LN* (Fig. 81), ou qu'on a $n = 1$, la formule précédente pourra donner encore la valeur de Q. Mais alors en cherchant directement Q, on trouvera que cette quantité peut s'ex- Fig. 81.

primer par une équation finie & algébrique qui eſt $Q = \frac{64 t r^2 \sqrt{(2ar)}}{15 \theta}$, les lettres t, Q, r, a, θ exprimant les mêmes choſes que ci-deſſus.

La hauteur moyenne de l'eau eſt exprimée par la fraction $\frac{1024 \times 2r}{225 \Pi^2}$ qui eſt à peu près égale à $\frac{25}{27} r$. D'où l'on voit que cette hauteur eſt toujours moindre que la diſtance du centre de l'orifice à la ſurface de l'eau.

Remarque II.

259. Il reſteroit encore à donner une formule pour meſurer la dépenſe, lorſque la ſurface de l'eau eſt au-deſſous du point L, & que par conſéquent l'orifice eſt un ſegment de cercle. Mais je ne la donne pas, parce que dans les problêmes de cette eſpèce où la ſurface ſupérieure de l'eau n'eſt pas ſoutenue par la paroi à l'endroit de l'orifice, elle s'abaiſſe ſenſiblement vers le milieu; ce qui trouble le rapport naturel des vîteſſes, & empêche que la théorie ne puiſſe déterminer les écoulemens que d'une manière aſſez imparfaite.

Scholie général.

260. Ces exemples ſuffiſent, ce me ſemble, pour faire connoître la manière de déterminer les écoulemens des fluides par une ſeule ouverture. Quand un fluide ſort par pluſieurs ouvertures à-la-fois, & que ces ouvertures ſont toujours ſuppoſées fort petites,

l'écoulement se fait par chacune d'elles de la même manière que si elle étoit seule. Il n'y a donc à cet égard aucune nouvelle difficulté dans le problême. Seulement on doit observer qu'une petite ouverture placée dans le voisinage d'une plus grande, donne un peu moins à proportion que celle-ci. J'expliquerai cela en détail ci-dessous, à l'aide de l'expérience.

Je passe à la solution de différens problêmes sur les écoulemens de vases traversés verticalement ou horisontalement de plusieurs diaphragmes, problêmes curieux par eux-mêmes, & qui ont de fréquentes applications dans la pratique.

PROPOSITION IX. PROBLEME.

261. *Les vases* ABCD, FCEG, HELK (Fig. 82) *étant supposés communiquer ensemble par les petites ouvertures* C, E, *& le fluide s'échappant dans l'air par la petite ouverture* L *du dernier : on demande les hauteurs dûes aux vîtesses en* C, E, L, *& la quantité de l'écoulement, lorsque le mouvement est parvenu à l'uniformité, & que par conséquent le premier vase recevant autant d'eau qu'il en sort par l'ouverture* L, *les hauteurs* AB, CF, EH *demeurent constamment les mêmes ?* Fig. 82.

SOLUTION.

Puisque les ouvertures *C*, *E*, *L* sont regardées comme infiniment petites par rapport aux amplitudes des vases, il est évident que la petite masse qui

passe à chaque instant du premier vase dans le second, & celle qui passe du second dans le troisième, ne peuvent occasionner, en vertu de ces mouvemens, qu'un ébranlement insensible dans le fluide; & que par conséquent un tel ébranlement ne peut produire que des variations comme nulles dans les vîtesses en C, E, L, sur-tout lorsque ces ouvertures ne sont pas en ligne droite. Ainsi à cause de l'équilibre qui auroit lieu (35) entre les deux fluides $CFOB$, $CFGE$ qui communiquent ensemble par l'ouverture C, & entre les deux fluides $EHQC$, $EHKL$ qui communiquent ensemble par l'ouverture E, si le fluide étoit en repos séparément dans les vases $CFOB$, $CFGE$, $EHQC$, $EHKL$, combinés ensemble deux à deux : on voit que dans l'hypothèse du problême, la vîtesse en C est simplement dûe à la hauteur DF; la vîtesse en E, à la hauteur GH; la vîtesse en L, à la hauteur KL. Donc en nommant t le temps de l'écoulement; θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a; Q chacune des quantités égales d'eau qui passent pendant le temps t par chacune des trois ouvertures C, E, L; h la hauteur connue AB du réservoir $ABCD$; x la hauteur DF dûe à la vîtesse en C; y la hauteur GH dûe à la vîtesse en E; z la hauteur KL dûe à la vîtesse en L : on aura (245), $Q = \frac{2tC\sqrt{ax}}{\theta}$, $Q = \frac{2tE\sqrt{ay}}{\theta}$, $Q = \frac{2tL\sqrt{az}}{\theta}$. De plus $x + y + z = h$. Ces équa-

tions comparées ensemble donnent, pour les quatre inconnues x, y, z, Q, les valeurs suivantes,

$$x = h \times \frac{L^2 E^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$y = h \times \frac{C^2 L^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$z = h \times \frac{C^2 E^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$Q = \frac{2tL.\sqrt{ah}}{\theta} \times \frac{CE}{\sqrt{[C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2]}}.$$

Ces formules contiennent tout ce qui est relatif à l'écoulement proposé, & fournissent des conséquences analogues à celles qu'on a tirées de l'article 244. C. Q. F. T.

Le problême se résoudroit de la même manière, s'il y avoit un plus grand nombre de vases. On trouvera dans le problême suivant des applications de formules analogues aux précédentes.

Proposition X. Probleme.

262. *Le vase* AIVD (Fig. 83) *entretenu constamment plein à la hauteur* AI, *étant traversé de plusieurs diaphragmes* BC, ZT, IV, *percés de petites ouvertures* M, N, P : *on demande les hauteurs dûes aux vîtesses en* M, N, P, *&* *la quantité d'eau qui passera en un temps donné par chacune de ces ouvertures ?* Fig. 83.

Solution.

1°. Il est clair que l'écoulement naturel de l'eau *ABCD* par le trou *M* étant empêché en partie par

la résistance de l'eau inférieure, l'eau sort par M de la même manière qu'elle sortiroit par un orifice latéral C égal à M, si elle communiquoit par-là avec l'eau $FCGR$ d'un réservoir latéral dont la hauteur FC exprimât la résistance que chaque point de l'eau en M éprouve de la part de l'eau inférieure.

2°. Comme la réaction est toujours égale & contraire à l'action, la partie d'eau $BCTZ$ est comprimée en tous ses points par l'eau supérieure avec une force proportionnelle à CF. Ainsi si l'eau à son passage en N n'éprouvoit aucune résistance de la part de l'eau inférieure, la hauteur dûe alors à sa vîtesse seroit TF, & l'écoulement se feroit de la même manière que celui du vase latéral $FTEG$ par une ouverture E égale à l'ouverture N. Soit TQ la hauteur proportionnelle à la résistance que l'eau à son passage en N éprouve en chacun de ses points de la part de l'eau inférieure. L'écoulement par N se fera, comme il se feroit naturellement dans le vase $QHGF$ par une ouverture H égale à l'ouverture N.

3°. On voit de même que l'écoulement par l'ouverture P se fera de même que se feroit celui du vase $SLKH$ par une ouverture L égale à P, la hauteur LK ou SH étant égale à VQ.

Cela posé, en nommant t le temps de l'écoulement; θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a; Q chacune des quantités égales d'eau qui passent pendant le temps t par chacune des trois ouvertures M, N, P; h la hauteur

teur donnée AI; x la hauteur DF dûe à la vîtesse en M; y la hauteur GH dûe à la vîtesse en N; z la hauteur KL dûe à la vîtesse en P: on aura (244), $Q = \frac{2tM.\sqrt{ax}}{\theta}$, $Q = \frac{2tN.\sqrt{ay}}{\theta}$, $Q = \frac{2tP.\sqrt{az}}{\theta}$. De plus on aura $x + y + z = h$.

Ces équations qui reviennent à celles de l'article précédent, donnent

$$x = h \times \frac{N^2P^2}{M^2P^2 + M^2N^2 + N^2P^2},$$

$$y = h \times \frac{M^2P^2}{M^2P^2 + M^2N^2 + N^2P^2},$$

$$z = h \times \frac{M^2N^2}{M^2P^2 + M^2N^2 + N^2P^2},$$

$$Q = \frac{2tP\sqrt{ah}}{\theta} \times \frac{MN}{\sqrt{[M^2P^2 + M^2N^2 + N^2P^2]}}.$$

C. Q. F. T.

On procéderoit de la même manière, s'il y avoit un plus grand nombre de diaphragmes & d'ouvertures.

COROLLAIRE I.

263. Lorsque la dernière ouverture P est très-petite par rapport aux autres M, N, on peut négliger, dans le dénominateur commun des fractions précédentes, les termes où P se trouve, en comparison des autres; & alors on a sensiblement $x = h \times \frac{P^2}{M^2}$, $y = h \times \frac{P^2}{N^2}$, $z = h$, $Q = \frac{2tP\sqrt{ah}}{\theta}$.

D'où l'on voit que l'écoulement par l'ouverture P ſe fait, à très-peu de choſe près, de la même manière que dans l'article 244; ce qui doit être en effet, puiſque la figure du réſervoir eſt indifférente à l'écoulement, quand l'ouverture par laquelle la liqueur ſort eſt cenſée infiniment petite par rapport à toutes les amplitudes horiſontales du réſervoir.

COROLLAIRE II.

264. Si au contraire les ouvertures M, N ſont très-petites par rapport à l'ouverture P, on a ſenſiblement $x = h \times \frac{N^2}{M^2 + N^2}$, $y = h \times \frac{M^2}{M^2 + N^2}$, $z = h \times \frac{M^2 N^2}{M^2 P^2 + N^2 P^2}$, $Q = \frac{2tM.N\sqrt{ah}}{\theta\sqrt{[M^2 + N^2]}}$. D'où il ſuit que la vîteſſe & la quantité de l'écoulement par l'ouverture P deviennent très-petites.

On voit par-là combien les étranglemens qui ſe forment fréquemment dans les tuyaux de conduite des eaux jailliſſantes ſont nuiſibles à la hauteur & à la dépenſe des jets. De même, on voit la néceſſité de diminuer les étranglemens dans les pompes, ou d'augmenter les diamètres des ſoupapes par rapport à celui du trou par lequel l'eau s'échappe dans l'air.

COROLLAIRE III.

265. Suppoſons que les trois ouvertures M, N, P ſoient égales entr'elles. On aura $x = y = z = \frac{h}{3}$, $Q = \frac{2tP\sqrt{ah}}{\theta\sqrt{3}}$. D'où l'on voit que la dé-

penſe Q eſt à la dépenſe $\frac{2tP\sqrt{ah}}{\theta}$ qui auroit lieu (244), par l'ouverture P, ſi les diaphragmes BC, ZT n'exiſtoient pas, comme 1 eſt à $\sqrt{3}$. On trouvera également le rapport de ces deux dépenſes, quand les orifices M, N, P ſeront entr'eux dans tel autre rapport qu'on voudra.

Corollaire IV.

266. En général on peut faire enſorte que deux des trois ouvertures, par exemple M & N, étant données, la troiſième P ſoit telle que la dépenſe par cette ouverture ſoit à celle qu'elle feroit ſi les diaphragmes BC, ZT n'exiſtoient pas, comme 1 eſt à un nombre quelconque n. Car pour ſatisfaire à cette condition, on a évidemment l'équation $\frac{n.M.N}{\sqrt{[M^2N^2 + M^2P^2 + N^2P^2]}} = 1$; d'où l'on tire

$$P = \frac{M.N\sqrt{[nn - 1]}}{\sqrt{[M^2 + N^2]}}.$$

Lorſque les ouvertures M & N ſont égales, cette équation devient $P = M \times \sqrt{\frac{nn - 1}{2}}$.

Ces formules ſont ſuſceptibles de pluſieurs autres applications que nos Lecteurs feront aiſément.

Remarque.

267. Il eſt à remarquer, au ſujet des cinq articles précédens, que les intervalles compris entre les diaphragmes BC, ZT, IV n'entrent point dans

les expreſſions de x, y, z, Q. Ainſi ces quantités ſeront toujours les mêmes, quelles que ſoient les poſitions des diaphragmes, pourvu néanmoins que leurs diſtances ſoient telles que le fluide en coulant forme toujours une maſſe continue dans l'intérieur du réſervoir. Lorſqu'il ſe meut par parties détâchées, & non comme un ſeul & même tout, la théorie précédente n'a plus lieu. La preſſion de l'air environnant, qui agit en tout ſens, de bas en haut contre le fluide à ſa ſortie par l'orifice P, comme de haut en bas contre ſa ſurface ſupérieure, s'oppoſe à une telle ceſſation de continuité; mais elle peut néanmoins arriver en certains cas. Reprenons, par exemple, l'hypothèſe de l'article 264. L'ouverture inférieure P, quoique toujours fort petite, étant ſuppoſée beaucoup plus grande que les deux autres M, N, il peut ſe faire que ſi la hauteur ZI du compartiment $IZTV$ eſt conſidérable, la preſſion qui en réſulte ſur l'orifice P ſoit plus grande qu'il ne faut, pour que l'eau paſſant par N en vertu de la preſſion de l'eau ſupérieure qui la pouſſe, & de ſon adhérence avec l'eau inférieure qui tend à l'entraîner, arrive avec aſſez d'abondance pour fournir à l'écoulement par P. Alors la ſurface de l'eau contenue dans le compartiment $IZTV$ s'abaiſſe quelque part en XY; il ſe forme un vuide $ZXYT$ que l'air entraîné par l'eau ſupérieure vient remplir; & l'écoulement en P ſe fait comme ſi le réſervoir $IXYV$ étoit entretenu plein à la hauteur IX. La même choſe peut arriver dans les compartimens ſupérieurs.

Du reste qu'il se forme ou non des vuides d'eau dans le réservoir, l'observation que nous avons faite (264) sur la nécessité d'éviter les étranglemens dans les tuyaux de conduite & dans les pompes, subsiste également. Car la dépense par l'ouverture *P* ne peut être que très-petite, puisqu'il n'en sort que l'eau fournie par les ouvertures supérieures.

PROPOSITION XI. PROBLEME.

268. *La liqueur du vase* ABCD (Fig. 84) *entretenu constamment plein à la hauteur* AB, *passant par l'ouverture* M *dans le vase latéral* CEGF, *duquel elle ne peut s'échapper que par les ouvertures* N, P : *on demande les hauteurs dûes aux vîtesses en* M, N, P, & *les quantités des écoulemens ?* Fig. 84.

SOLUTION.

Supposons que la liqueur en passant du vase *ABCD* dans le vase *ECFG*, éprouve en chaque point de l'orifice *M* une réaction exprimée par *MH*, de la part de l'eau contenue dans le réservoir *ECFG*, & des parois de ce même réservoir. Il est évident qu'ayant mené les horisontales *NV*, *HK*, les hauteurs dûes respectivement aux vîtesses en *M*, *N*, *P* sont exprimées par les verticales *DH*, *HV*, *HC*. Ainsi en nommant *t* le temps de l'écoulement; θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée *a*; *h* la hauteur *DC*; *b* sa partie *DV*; *x* la hauteur *DH*; *Q* la quantité d'eau qui passe par *M*; *q* celle qui sort par *N*; *q'* celle

qui ſort par P : on aura (245), $Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{\theta}$,

$q = \frac{2tN\sqrt{[a(b-x)]}}{\theta}$, $q' = \frac{2tP\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta}$.

De plus $q + q' = Q$. Ces équations donnent

$$M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(h-x)}$$

qui ſe réduit à une équation du ſecond degré, de laquelle on tirera x. Connoiſſant x, on connoîtra HV, HC, Q, q, q'. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

269. Les hauteurs HV, HC dûes aux vîteſſes en N & P ſont évidemment celles des colonnes qui preſſeroient perpendiculairement les parois du vaſe $ECFG$ aux mêmes endroits, ſi l'on imaginoit que tout d'un coup les orifices N & P fuſſent bouchés. Ainſi la preſſion que ſouffre une partie X priſe en un endroit donné des parois du réſervoir $ECFG$, quand la liqueur ſort par les ouvertures N & P, eſt exprimée par $X \times HC$.

Par exemple, ſuppoſons l'ouverture P infiniment petite, ou $P = 0$. L'équation générale $M\sqrt{x} = N\sqrt{[b-x]} + P\sqrt{[h-x]}$ deviendra $M\sqrt{x} = N\sqrt{[b-x]}$; d'où l'on tire $x = \frac{N^2 b}{M^2 + N^2}$, & par conſéquent $CH = h - x = \frac{M^2 h + N^2 (h-b)}{M^2 + N^2}$. Donc la preſſion de $X = \frac{X[M^2 h + N^2(h-b)]}{M^2 + N^2}$.

On détermineroit de la même manière la pression contre tout autre point des parois du réservoir *ECFG*, & même du réservoir *ABCD*. Mais on ne doit pas oublier que cette détermination suppose que les ouvertures *M*, *N*, *P* sont fort petites, & que les eaux sont comme stagnantes dans les deux réservoirs. Elle ne pourroit par conséquent pas être employée sans erreur, si les eaux avoient une vîtesse sensible dans l'un ou l'autre réservoir. Nous donnerons dans la suite la méthode pour déterminer la pression que l'eau mue dans un tuyau, exerce contre les parois de ce tuyau.

SECTION II.

Du mouvement des eaux qui sortent par des ouvertures, de vases qui se vuident.

270. Il n'en est pas des réservoirs qui se vuident, comme de ceux qui demeurent constamment pleins à même hauteur. Quelle que soit la figure & la capacité de ces derniers, la quantité d'eau dépensée par une même ouverture est toujours la même, toutes choses d'ailleurs égales; au lieu que la quantité d'eau dépensée par un vase qui se vuide sans recevoir de nouvelle eau provisionnelle, dépend non-seulement de la grandeur de l'orifice, mais encore de la figure & de la capacité du vase, combinées avec le temps & la hauteur. On voit donc que, selon

les différentes eſpèces de vaſes qu'on employera, les écoulemens varieront.

PROPOSITION I.

Fig. 85. 271. *Si un vaſe quelconque* ApqC (Fig. 85) *ſe vuide par le petit orifice* pq, *enſorte que la ſurface de l'eau prenne ſucceſſivement les poſitions* ABCD, EFGH, OQPZ, &c : *les différentes vîteſſes à la ſortie de l'orifice ſeront dûes aux hauteurs verticales correſpondantes* Kp, Lp Rp, &c.

Car le petit priſme fluide qui ſort à chaque inſtant peut être regardé comme chaſſé par le poids abſolu de la colonne qui répond verticalement à l'orifice, puiſque les vîteſſes des tranches intérieures ſont infiniment petites par rapport à celles de l'orifice (232 & 233). Le reſte de la démonſtration s'acheve comme dans l'article 237.

COROLLAIRE.

272. De-là & de l'article 235, n°. 3, il ſuit que ſi lorſque la ſurface de l'eau eſt en *ABCD*, la vîteſſe à la ſortie de l'orifice étoit continuée uniformément, la liqueur parcourroit un eſpace égal à 2 *Kp*, dans le temps qu'un corps peſant mettroit à tomber de la hauteur *Kp*; & que ſi lorſque la ſurface ſupérieure eſt en *EFGH*, la vîteſſe à la ſortie de l'orifice étoit continuée uniformément, la liqueur parcourroit un eſpace égal à 2*Lp*, dans le temps qu'un corps peſant mettroit à tomber de la hauteur *Lp*; *&c.*

PROPOSITION II. PROBLEME.

273. *Déterminer le temps que la ſurface ſupérieure* ABCD *de la liqueur contenue dans le même vaſe* ApqC *qui ſe vuide par le petit orifice* pq *horiſontal ou latéral, employera à deſcendre de la hauteur verticale* KR *pour venir prendre la poſition* OQPZ?

SOLUTION.

Suppoſons qu'au bout d'un certain temps la ſurface de la liqueur ſoit parvenue dans la poſition indéterminée $EFGH$. Qu'on mène parallèlement au plan $EFGH$ & à une diſtance infiniment petite du même plan, le plan $efgh$. Il eſt clair que la petite tranche fluide $EFGHhefg$ peut être regardée comme un priſme dont $EFGH$ eſt la baſe & Ll la hauteur; & qu'elle ſera par conſéquent exprimée par $EFGH \times Ll$.

En nommant t le temps cherché; θ le temps qu'un corps peſant mettroit à tomber de la hauteur donnée a; K l'aire de l'orifice pq: il eſt évident que ſi lorſque la ſurface de la liqueur eſt parvenue en $EFGH$, la vîteſſe à la ſortie de l'orifice étoit continuée uniformément, il ſortiroit pendant le temps t une quantité de liqueur exprimée par $\frac{t\sqrt{a}}{\theta} \times 2K \times \sqrt{Lp}$ (245). Or puiſqu'en un inſtant la ſurface $EFGH$ s'abaiſſe de la petite hauteur Ll, & que durant ce même inſtant la vîteſſe varie infiniment peu & doit être par conſéquent cenſée uniforme; ſi

l'on fait cette proportion, la quantité de liqueur $\frac{t\sqrt{a}}{\theta} \times 2K\sqrt{Lp}$ eſt au temps t, comme la quantité de liqueur $EFGH \times Ll$, eſt à un quatrième terme, ce quatriéme terme $\frac{\theta \times EFGH \times Ll}{2K\sqrt{a}.\sqrt{Lp}}$ ſera viſiblement l'expreſſion du temps élémentaire que la liqueur employe à parcourir la petite hauteur Ll. Ainſi pour avoir le temps total t, il ne s'agira que de ſommer tous ces temps élémentaires.

Sur la droite IS égale & parallèle à Kp, comme axe, ſoit conſtruite une parabole SrT dont le paramètre $= 4SI$. Ayant prolongé les droites AC, EG, eg, OP, &c juſqu'à la parabole, de manière que IT, Vu, mn, or, &c. ſoient les ordonnées de cette dernière courbe qui répondent aux ſections $ABCD$, $EFGH$, $efgh$, $OQPZ$, &c; je conſtruis une ſeconde courbe XaY telle que l'ordonnée XI ſoit égale au quotient de l'aire $ABCD$ diviſée par l'ordonnée correſpondante IT de la parabole; que l'ordonnée Va ſoit égale au quotient de l'aire $EFGH$ diviſée par l'ordonnée correſpondante Vu de la parabole; ainſi des autres. Alors on aura, par la propriété de la parabole, $Lp = \frac{\overline{Vu}^2}{4IS}$ ou $\sqrt{Lp} = \frac{Vu}{2\sqrt{IS}}$; donc $\frac{EFGH}{\sqrt{Lp}} = \frac{EFGH \times 2\sqrt{IS}}{Vu} = Va \times 2\sqrt{IS}$, en mettant pour $\frac{EFGH}{Vu}$ ſa valeur Va. Par conſéquent le petit temps élémentaire

$\frac{\theta \times EFGH \times Ll}{2K\sqrt{a}.\sqrt{Lp}} = \frac{\theta\sqrt{IS}}{K\sqrt{a}} \times Va \times Ll$. Or dans cette expreſſion, le facteur $\frac{\theta\sqrt{IS}}{K\sqrt{a}}$ eſt une quantité toujours conſtante ; l'autre facteur $Va \times Ll$ ou $Va \times Vm$ eſt l'élément de l'aire curviligne $IXaV$: & comme le même raiſonnement a lieu pour tous les autres élémens du temps cherché, comparés aux autres élémens correſpondans de l'aire finie $IXco$, il s'enſuit que le temps cherché t eſt égal au produit de la quantité conſtante $\frac{\theta\sqrt{IS}}{K\sqrt{a}}$ par l'aire $IXco$, c'eſt-à-dire, qu'on aura

$$t = \theta \times \frac{\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{IXco}{K}. \text{ C. Q. F. T.}$$

Ordinairement la détermination de l'aire $IXco$ demande le ſecours du calcul intégral; mais du moins le problême eſt réduit à une ſimple difficulté de Géométrie.

COROLLAIRE I.

274. Les quantités θ, a, IS, K étant conſtantes, il eſt clair que les temps employés par la liqueur à s'abaiſſer de $ABCD$ en $EFGH$, $OQPZ$, &c, ſont entr'eux comme les aires correſpondantes $IXaV$, $IXco$, &c. Donc ſi ces aires ſont entr'elles en raiſon donnée, les temps dont il s'agit ſeront auſſi entr'eux dans la même raiſon. D'où l'on voit qu'on aura un *clepſydre* ou *horloge d'eau*, ſi l'on donne au vaſe une figure telle que les aires $IXaV$, $IXco$,

&c, croiſſent uniformément comme le temps, ou ſoient entr'elles comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c.

COROLLAIRE II.

275. Connoiſſant la hauteur *KR* dont la ſurface de l'eau s'eſt abaiſſée, on connoît la quantité de liqueur qui s'eſt écoulée, puiſque la figure du vaſe eſt donnée, & qu'on ſçait par conſéquent toiſer l'eſpace *ABCDZOQP* que la liqueur occupoit. Or comme on a donné le moyen de trouver le temps que la ſurface de la liqueur employe pour s'abaiſſer de la hauteur *KR*, il s'enſuit qu'on peut toujours trouver la quantité de liqueur qui s'écoule d'un vaſe par une ouverture donnée, en un temps déterminable par la figure du vaſe & par la hauteur dont la ſurface de l'eau s'abaiſſe.

PROPOSITION III. PROBLEME.

276. *Le vaſe* ApqC *étant ſuppoſé produit par la révolution de la courbe parabolique* AOpK, *dont la nature eſt telle que les quarrés des ordonnées* AK, EL, OR, &c, *ſont proportionnels aux racines quarrées des abſciſſes correſpondantes* pK, pL, pR, &c: *il s'agit de trouver le temps de l'écoulement correſpondant à la hauteur* KR?

SOLUTION.

Puiſque les cercles élémentaires *ABCD*, *EFGH*, *OQPZ*, *&c*, dont le ſolide *ApqC* eſt compoſé, ſont

entr'eux comme les quarrés de leurs raïons AK, EL, OR, &c, & qu'on a, par hypothèse, $\overline{AK}^2 : \overline{EL}^2 : \overline{OR}^2 : \&c :: \sqrt{pK} : \sqrt{pL} : \sqrt{pR} : \&c$; il est clair qu'on aura $\frac{ABCD}{IT} = \frac{EFGH}{Vu} = \frac{OQPZ}{or}$; &c. Or par la construction générale (273), $IX = \frac{ABCD}{IT}$, $Va = \frac{EFGH}{Vu}$, $oc = \frac{OQPZ}{or}$, &c. Donc $IX = Va = oc$, &c. Ainsi XY devient une ligne droite verticale ; & le temps cherché t est donné par l'équation

$$t = \theta \times \frac{\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{IX \times Io}{K}.$$ C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

277. Le produit $\theta \times \frac{\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{IX}{K}$ étant toujours le même, on voit que les différens temps employés à parcourir les hauteurs KL, KR, &c, sont proportionnels à ces hauteurs ; & que par conséquent si l'on veut, par exemple, que les parties KL, LR, &c, soient parcourues en termes égaux, il faut que ces parties soient égales entr'elles.

COROLLAIRE II.

278. La quantité de liqueur qui s'écoule pendant que la surface s'abaisse de $ABCD$ en $OPQZ$, est égale au solide du tronc $AOPC$. Or les élémens $ABCD$, $EFGH$, $OQPZ$, &c de ce solide, étant proportionnels aux ordonnées correspondantes IT,

Vu, *or*, &c de la parabole *SrT*, il eſt évident que le ſolide du tronc $AOPC = \frac{2}{3} ABCD \times pK - \frac{2}{3} OQPZ \times pR$. On connoît donc la quantité d'eau qui ſort pendant le temps *t*.

PROPOSITION IV. PROBLEME.

Fig. 86. 279. *Le vaſe* AMNC (Fig. 86) *étant ſuppoſé priſmatique, on demande le temps que la ſurface de la liqueur mettra à s'abaiſſer de* ABCD *en* OQPZ?

SOLUTION.

Imaginons qu'un corps non peſant ſoit pouſſé de bas en haut ſuivant la verticale *pK* par une force accélératrice conſtante qui lui imprime les mêmes degrés de vîteſſe que la peſanteur imprime à un corps qui tombe librement; de manière que le corps aſcendant parcoure l'eſpace *pK* ſuivant la même loi & dans le même temps que le corps deſcendant par la peſanteur parcourroit l'eſpace *Kp*. Il eſt clair que les différentes vîteſſes du corps aſcendant étant proportionnelles aux racines quarrées des eſpaces parcourus correſpondans, de même que celles du corps deſcendant, pourront être exprimées par les ordonnées de la parabole *SrT*. Suppoſons que le corps aſcendant étant arrivé en *l*, il parcoure le petit eſpace *lL* ou *mV* durant un temps infiniment petit, avec la vîteſſe repréſentée par l'ordonnée correſpondante *Vu* de la parabole. Pour trouver l'expreſſion de ce temps élémentaire, on conſidérera que le temps

total employé à parcourir l'eſpace pK eſt égal à $\frac{\theta\sqrt{IS}}{\sqrt{a}}$ (235, n°. 2), & que ſi la vîteſſe finale du corps aſcendant étoit continuée uniformément, ce corps parcourroit, durant le même temps $\frac{\theta\sqrt{IS}}{\sqrt{a}}$, un eſpace égal à $2\,IS$ ou à IT (235 n°. 3). Or par les premiers principes de la Méchanique, les temps employés à parcourir les eſpaces IT, mV doivent être entr'eux, comme ces eſpaces diviſés par les vîteſſes correſpondantes IT, Vu. Ainſi le petit temps que le corps aſcendant employe à parcourir l'eſpace mV eſt repréſenté par $\frac{\theta\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{Vm}{Vu}$. Comparant ce petit temps avec le petit temps $\frac{\theta\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{Va \times Vm}{K}$ que la ſurface $EFGH$ de l'eau employe à parcourir le même eſpace Vm (273); & conſidérant que $Va = \frac{ABCD}{Vu}$ par conſtruction : on verra que le premier eſt au ſecond, dans le rapport conſtant de l'aire K de l'orifice à l'aire $ABCD$ de la baſe du vaſe priſmatique. Le même rapport ayant lieu entre les autres temps élémentaires que le corps aſcendant & la ſurface de l'eau employent à parcourir de petits eſpaces égaux, on conclura que le temps total que le corps aſcendant employe à parcourir la hauteur pK ou SI, eſt au temps total que le vaſe met à ſe vuider, comme l'aire K eſt à l'aire $ABCD$. Donc en nommant A l'aire $ABCD$, le temps que le vaſe

$AMNC$ met à ſe vuider entièrement, eſt exprimé par $\frac{\theta\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{A}{K}$.

En regardant $OMNP$ comme le vaſe propoſé, on démontrera de la même manière que le tems que ce vaſe met à ſe vuider entièrement, eſt exprimé par $\frac{\theta\sqrt{OS}}{\sqrt{a}} \times \frac{A}{K}$.

Maintenant le temps que la ſurface de l'eau employe à deſcendre de $ABCD$ en $OQPZ$, eſt évidemment égal à la différence des deux temps dont on vient de parler. Ainſi ce temps cherché t ſera donné par l'équation $t = \frac{\theta A(\sqrt{IS} - \sqrt{oS})}{K\sqrt{a}}$, qui devient, (en faiſant $IS = h$, oS ou $NP = b$),

$$t = \frac{\theta A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}. \text{ C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE I.

280. On voit que parmi les ſept quantités θ, a, t, A, K, h, b contenues dans cette formule, & dont deux, θ & a ſont conſtantes, tandis que les cinq autres, t, A, K, h, b peuvent être indéterminées, connoiſſant quatre quelconques de ces dernières, on connoîtra la cinquième. D'où réſulte la ſolution de queſtions analogues à celles que nous avons déduites de l'article 244.

Veut-on, par exemple, connoître la hauteur $h - b$ dont la ſurface de l'eau s'abaiſſe, tout le reſte étant donné? On regardera b comme l'inconnue, & on

trouvera

trouvera d'abord $b = \left(\sqrt{h} - \frac{tK\sqrt{a}}{\theta A}\right)^2$, & ensuite $h - b = \frac{2t\theta AK\sqrt{ah} - t^2K^2a}{\theta^2 A^2}$. Multipliant cette quantité par A, on aura la quantité d'eau qui ſort pendant le temps t.

COROLLAIRE II.

281. La même formule $t = \frac{\theta A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$ fournit la manière de conſtruire un clepſydre cylindrique. Par exemple, qu'il s'agiſſe de partager la hauteur CN du vaſe $AMNC$ en douze parties qui ſoient parcourues en temps égaux par la ſurface du fluide, on repréſentera CN par 144, quarré de 12; de ces 144 parties égales qui compoſent CN, on retranchera 121, quarré de 11; le reſte 23 fera connoître la première partie cherchée CG; de 121, on retranchera 100, quarré de 10, le reſte 21 fera connoître la ſeconde partie cherchée; de 100, on retranchera 81, quarré de 9, le reſte 19 fera connoître la troiſième partie, &c. D'où l'on voit que les parties ſucceſſives de la hauteur qu'on demande, ſont exprimées par la ſuite des nombres 23, 21, 19, 17, 15, &c.

Quant à la meſure préciſe du temps employé à parcourir chaque partie de la hauteur CN, on le déterminera par notre formule. Ainſi ſi l'on veut que ce temps = 1 heure, on fera t = 1 heure, & il faudra tellement proportionner la baſe A & la hau-

teur h du vaſe avec l'aire K de l'orifice, qu'on ait, 1 heure $= \frac{\theta A(\sqrt{h} - \sqrt{\frac{121}{44}h})}{K\sqrt{a}}$, ou 1 heure $= \frac{\theta A\sqrt{h}}{12 K\sqrt{a}}$. On voit par cette équation que deux des trois quantités A, h, K, étant données, on trouvera la troiſième.

COROLLAIRE III.

282. Si l'on a un vaſe priſmatique $AMNC$, plein juſqu'en $ABCD$; qu'on lui permette de ſe vuider entièrement, qu'enſuite l'ayant rempli de nouveau juſqu'en $ABCD$ on l'entretienne conſtamment plein à cette hauteur, tandis qu'il ſort de l'eau par l'orifice pq: il ſortira dans ce ſecond cas une quantité d'eau, double de celle qui eſt contenue dans l'eſpace $AMNC$, pendant le même intervalle de temps que le vaſe a mis d'abord à ſe vuider entièrement. Car dans le premier cas le temps que le vaſe met à ſe vuider entièrement, eſt exprimé par $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}}$ (279). Or (245) la quantité de liqueur qui s'écoule dans le ſecond cas, pendant le temps $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}}$, eſt exprimée par $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}} \times \frac{2K\sqrt{ah}}{\theta} = 2A.h$, quantité double du priſme $AMNC$ qui eſt égal à $A.h$.

COROLLAIRE IV.

283. Lorſqu'on voudra comparer enſemble les temps des écoulemens de deux vaſes priſmatiques

qui ſe vuident, on obſervera qu'en conſervant pour le premier les dénominations de l'article 279, & déſignant, pour le ſecond, les quantités analogues à t, A, K, h, b par les mêmes lettres accentuées, on aura les deux équations $t = \frac{\theta A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$, $t' = \frac{\theta A'(\sqrt{h'} - \sqrt{b'})}{K'\sqrt{a}}$; d'où l'on tire la proportion, $t : t' :: \frac{A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K} : \frac{A'(\sqrt{h'} - \sqrt{b'})}{K'}$, qui fait voir que les temps employés par les ſurfaces des eaux à parcourir les hauteurs $h - b$, $h' - b'$, ſont entr'eux, comme les produits des baſes des priſmes par les différences des racines quarrées des hauteurs premières & des hauteurs dernières des eaux dans les réſervoirs, diviſés par les aires des orifices.

Corollaire V.

284. Il eſt aiſé de déterminer par les mêmes principes l'écoulement d'un vaſe qui contient des fluides de différentes eſpèces. Soit, par exemple, $AMNC$ (Fig. 87) un vaſe priſmatique qui contient des fluides différens $MNLF$, $FLGE$, $EGCA$, leſquels ſont ſuppoſés ne pouvoir ſe mêler enſemble, les plus légers étant placés ſur les plus peſans. Que ce vaſe ſe vuidant par l'orifice pq, la ſurface FL du fluide inférieur parvienne en un certain temps dans la poſition OP. Si l'on nomme p, ϖ, ϖ' reſpectivement les peſanteurs ſpécifiques des fluides $MNLF$, $FLGE$, $EGCA$; la preſſion qui produit l'écoulement par

l'orifice pq, eſt la même (46) que ſi à la place du fluide $FLGE$ on ſubſtituoit une colonne de même eſpèce que $MNLF$, & dont la hauteur fût $GL \times \frac{\varpi}{p}$; & qu'à la place du fluide $EGCA$ on ſubſtituât une colonne de même eſpèce que $MNLF$, & dont la hauteur fût $GC \times \frac{\varpi'}{p}$. Donc en faiſant $NL = c$, $LG = f$, $GC = g$, & conſervant toutes les autres dénominations de l'article 279, il n'y aura qu'à mettre $c + \frac{f\varpi}{p} + \frac{g\varpi'}{p}$ à la place de h dans l'expreſſion qu'on a trouvée pour le temps; ce qui donnera

$$t = \frac{\theta A(\sqrt{[pc + f\varpi + g\varpi']} - \sqrt{pb})}{K\sqrt{a}.\sqrt{p}}.$$

On voit que quand le fluide $MNLF$ eſt entièrement ſorti, & que le ſecond lui a ſuccédé dans l'écoulement, l'expreſſion du temps eſt

$$t = \frac{\theta A(\sqrt{[f\varpi + g\varpi']} - \sqrt{\varpi b})}{K\sqrt{a}.\sqrt{\varpi}},$$

& quand le ſecond fluide eſt entièrement ſorti pour faire place à l'écoulement du dernier, elle eſt

$$t = \frac{\theta A(\sqrt{g} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}.$$

On raiſonnera d'une manière analogue pour un plus grand nombre de fluides.

PROPOSITION V. PROBLEME.

Fig. 88. 285. *Le vaſe* ASODHPVC (Fig. 88) *compoſé des deux vaſes priſmatiques* ASVC, ODHP,

se vuidant par le petit orifice pq *percé dans le fond* DH : *trouver le temps que la surface du fluide mettra à s'abaisser d'une hauteur proposée ?*

SOLUTION.

Ayant prolongé AS, CV jusqu'à la rencontre de DH prolongé aussi de part & d'autre, on observera que l'ouverture pq étant très-petite, la vîtesse du fluide en p est la même que s'il sortoit du vase simple $AMNC$, & qu'elle est toujours dûe, à chaque instant, à la hauteur de la surface du fluide au-dessus de pq. Ainsi en nommant A l'aire de la base du premier vase $ASVC$, K celle de l'orifice, θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur a, on trouvera (279),

1°. Que le temps employé par le fluide à descendre de AC en EG, dans le premier vase $ASVC$, est exprimé en général par $\frac{\theta A(\sqrt{AM} - \sqrt{EM})}{K\sqrt{a}}$, & que le temps employé à descendre de AC en SV est exprimé par $\frac{\theta A(\sqrt{AM} - \sqrt{SM})}{K\sqrt{a}}$.

2°. Quand la surface du fluide est parvenue dans le second vase $ODHP$, on trouve (en nommant B l'aire de la base de ce vase) que le temps employé par cette surface à parvenir de OP en QZ, est exprimé par $\frac{\theta B.(\sqrt{OD} - \sqrt{QD})}{K\sqrt{a}}$.

Ajoutant ce temps avec celui qui a été employé à parcourir AS, on aura le temps que la surface de

l'eau met à parvenir de AC en QZ, lequel eſt par conſéquent repréſenté par

$$\frac{\theta A(\sqrt{AM}-\sqrt{SM})+\theta B(\sqrt{OD}-\sqrt{QD})}{K\sqrt{a}}.$$

C. Q. F. T.

REMARQUE.

286. L'orifice pq a été ſuppoſé très-petit, pour que le fluide au ſortir de cet orifice puiſſe être regardé (271) comme pouſſé à chaque inſtant par le poids abſolu de la colonne correſpondante, & pour pouvoir conclure de-là que la vîteſſe eſt dûe à toute la hauteur du fluide au-deſſus du trou. Cependant ſelon l'expérience, tant que le fluide conſerve une certaine hauteur au-deſſus de SV dans le vaſe ſupérieur $ASVC$, la vîteſſe en p eſt dûe, au moins ſenſiblement, à la hauteur entière du fluide au-deſſus de pq, même lorſque pq augmente juſqu'à devenir égal au fond DH, pourvu néanmoins que le tuyau $ODHP$ ſoit mince par rapport au vaſe ſupérieur $ASVC$, & que de plus il ne ſoit pas fort long. Mais alors cette vîteſſe n'eſt pas toute produite par la preſſion du fluide ſupérieur; elle vient en partie du mouvement libre & fini que les particules ont acquis en deſcendant. On peut donc encore en ce cas déterminer le temps que la ſurface du fluide met à s'abaiſſer dans le vaſe $ASVC$, d'une hauteur propoſée, par le moyen de la formule de l'article précédent, n°. 1. Quand le fluide eſt parvenu dans le vaſe $ODHP$, & que l'orifice $pq = DH$, la maſſe

d'eau $ODHP$ tombe toute d'une pièce à la manière des corps pesans. Si l'on veut connoître le temps qu'elle employera à s'écouler entièrement, on trouvera qu'en représentant par XO la hauteur dûe à sa vîtesse initiale, le temps dont il s'agit est égal à l'excès du temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur XD sur celui qu'il mettroit à tomber de la hauteur XO.

PROPOSITION VI. PROBLEME.

287. *Exposer en général la manière de trouver l'expression du temps* t *qu'un vase met à se désemplir par une ouverture latérale de grandeur sensible ?*

SOLUTION.

Ayant supposé que la surface de l'eau se soit abaissée d'une hauteur indéterminée, je cherche par la méthode de l'article 249, la quantité de liqueur qui sortiroit pendant le temps t, si la surface de l'eau demeuroit toujours dans cette même position. La quantité dont il s'agit est toujours de cette forme $F \times t$, F étant une fonction donnée de l'orifice & de la hauteur actuelle de la surface de l'eau au-dessus d'un point *donné* du même orifice. Ensuite je suppose que la surface de l'eau s'abaisse, pendant l'élément du temps, d'une hauteur infiniment petite, ensorte qu'il sorte une quantité d'eau, qui est égale au produit de la surface du fluide par la petite hauteur dont elle s'est abaissée. En nommant q cette quantité élémentaire d'eau, il est clair qu'on aura la

proportion, $F \times t : t :: q :$ l'élément du temps, qui est par conséquent représenté par $\frac{q}{F}$, expression dans laquelle on pourra toujours faire ensorte qu'il n'entre que des fonctions de l'orifice & de la hauteur variable du fluide, puisque la figure du vase est donnée. Il ne s'agira plus que de sommer ces temps élémentaires, pour avoir le temps cherché t. C. Q. F. T.

Je me contente d'indiquer ici cette solution générale, & je n'en fais pas d'applications particulières, parce qu'il y a très-peu de problêmes de cette espèce, qui ne demandent le secours du calcul intégral. Dans la pratique on peut ordinairement, sans craindre d'erreur sensible, déterminer l'écoulement comme si l'orifice étoit horisontal, & que la hauteur du fluide fût celle qui répond au centre de gravité du même orifice.

PROPOSITION VII. PROBLEME.

288. *On suppose que le vase quelconque* ISTL
Fig. 89. *(Fig. 89) entretenu constamment plein à la hauteur* TL *transmette l'eau au vase prismatique* AMNC *par le moyen du petit tuyau horisontal* TM, *& on demande le temps que la surface de l'eau dans le vase* AMNC *mettra à parvenir dans une position quelconque* EG?

SOLUTION.

Il est clair (237), que lorsque l'on ouvre l'orifice M pour faire entrer l'eau dans le vase $AMNC$,

elle s'élance avec une vîtesse dûe à la hauteur *TL* ou *AM*. Cette vîtesse subsisteroit toujours, si l'eau avoit la liberté de s'échapper, & ne restoit pas dans le vase *AMNC*. Mais quand il y en est entré une certaine quantité *MRSN*, la petite masse qui passe à chaque instant par *M* & qui va choquer la masse finie *MRSN*, perd par ce choc sa vîtesse primitive, & il n'en peut résulter aucun mouvement sensible dans le fluide *MRSN*. La surface *RS* s'élève donc alors suivant la même loi que si la vîtesse en *M* étoit simplement dûe, à chaque instant, à la hauteur *LX* excès de la hauteur totale *LT* sur la hauteur *RM*; car les eaux *ZXTS*, *RSNM*, qui sont à même hauteur, & qui communiquent ensemble par l'orifice *M* doivent être censées se faire mutuellement équilibre, (35).

Cela posé, le problême se résoud comme celui de l'article 279. Car si l'on regarde la hauteur *AR* comme donnée & comme celle du vase prismatique *ARSC* qui reçoit l'eau par l'orifice *M*; qu'ensuite on nomme *A* la base *ABCD*; *M* l'aire de l'orifice *M*; θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée *a*; *t* le temps que la surface de l'eau employe à parvenir de *RS* en EG: on aura

$$t = \frac{\theta A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{M\sqrt{a}}.$$

En effet, la vîtesse avec laquelle l'eau monte dans le vase *ARSC*, est exactement la même que seroit, aux mêmes endroits, celle d'un fluide *ARSC* qui

étant imaginé ſoumis à l'action d'une force égale à la peſanteur, mais dirigée de bas en haut, ſe vuideroit par un orifice pratiqué dans le fond ſupérieur *AC*, & égal à *M*. Or il eſt viſible (279) que dans ce dernier cas le temps employé par la ſurface du fluide à parvenir de *RS* en *EG* eſt donné par l'équation précédente. Donc cette même équation exprime le temps cherché dans l'hypothèſe du problême. Ç. Q. F. T.

COROLLAIRE.

289. De-là ſuit une conſéquence analogue à l'article 282. Dans le temps que le vaſe *ARSC* met à ſe remplir entièrement, il ſortiroit, par l'orifice *M*, d'un vaſe entretenu conſtamment plein à la hauteur *AR* au-deſſus de cette orifice, une quantité double de *ARSC*: ce qui revient encore à ceci, *le temps que le vaſe* ARSC *met à ſe remplir dans l'hypothèſe du problême eſt double de celui qu'un vaſe entretenu conſtamment plein à la hauteur* AR *au-deſſus de l'orifice* M, *employeroit à donner, par ce même orifice, la quantité d'eau* ARSC.

RRMARQUE.

290. La hauteur *AR* que nous avons regardée comme connue, ne peut pas différer beaucoup de *AM*. Il ſera facile, dans chaque cas particulier, de l'eſtimer à peu de choſe près, en ayant égard à l'étendue du fond *MN*. Lorſqu'on voudra déterminer le temps total que l'eau met à parvenir de *M* en *E*,

on pourra s'y prendre ainſi, ſans craindre d'erreur ſenſible. Ayant fixé *MR* à un petit nombre *connu* de pouces, 1°. on cherchera (247) le temps que la quantité d'eau *RMNS* employe à ſortir par l'orifice *M*, en ſuppoſant que la hauteur du fluide au-deſſus de l'orifice eſt conſtamment *LT*; 2°. On cherchera par la formule précédente, le temps que l'eau met à parvenir de *R* en *E*. Ajoutant enſemble ces deux temps, la ſomme ſera le temps demandé, du moins à très-peu de choſe près.

PROPOSITION VIII. PROBLEME.

291. *Le vaſe cylindrique* VMNT (Fig. 90), *percé à ſon fond* MN *d'une petite ouverture* K, *étant plongé verticalement dans un fluide indéſini, dont par conſéquent la ſurface ne monte ni ne deſcende : trouver le temps que la ſurface de l'eau dans le cylindre met à parvenir en* EG? Fig. 90.

SOLUTION.

Ce problême eſt exactement de la même eſpèce que le précédent; & ſi l'on ſuppoſe que la ſurface de l'eau dans le cylindre étant parvenue en *RS*, il n'y ait plus de choc ſenſible du fluide qui entre par *K* contre le fluide *RMNS*, ou que la vîteſſe en *K* n'eſt plus dûe, à chaque inſtant, qu'à la hauteur *AR* excès de celle du fluide environnant ſur celle du fluide contenu dans le cylindre : on trouvera l'équation

$$t = \frac{\theta A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{K\sqrt{a}},$$

dans laquelle A eſt la baſe du cylindre, K l'aire de l'orifice, t le temps que l'eau met à parvenir de R en E, θ le temps qu'un corps grave met à tomber de la hauteur a. C. Q. F. T.

Remarque.

292. L'orifice K étant ſuppoſé infiniment petit, il eſt viſible que la ſurface de l'eau dans le cylindre ne doit pas s'élever au-deſſus de AC, puiſque la vîteſſe en K, & à plus forte raiſon celle de la ſurface EG s'évanouit lorſque la hauteur AE s'évanouit. Mais il n'en ſeroit pas de même, ſi l'ouverture K avoit un rapport ſenſible à l'aire du fond MN. Car alors le mouvement primitif que le fluide environnant communique à celui qui entre par l'orifice K, ne peut s'éteindre par la peſanteur qu'au bout d'un certain temps; & comme la preſſion qui provient de la hauteur AE tend de plus à faire monter la maſſe d'eau $EMNG$: on voit que la ſurface de cette eau doit s'élever au-deſſus de AC pour deſcendre enſuite lorſque tout le mouvement aſcenſionnel eſt anéanti. Il eſt très-difficile en ce cas de déterminer le mouvement du fluide, d'une manière rigoureuſe & non hypothétique. La même remarque s'applique, avec quelque changement, à l'article 288.

Proposition IX. Probleme.

293. *Le même cylindre* VMNT *étant ſuppoſé plein juſqu'en* VT, *& ſe vuidant par l'ouverture* K

dans le fluide environnant; on demande le temps que la surface VT *mettra à s'abaisser en* OL?

SOLUTION.

Il est évident que l'excès de la hauteur du fluide dans le cylindre sur celle du fluide environnant produit le mouvement descensionel dans le cylindre, & que par conséquent le temps cherché est donné par l'équation,

$$t = \frac{\theta A(\sqrt{VA} - \sqrt{OA})}{K\sqrt{a}}. \text{ C. Q. F. T.}$$

La surface *OL* ne peut pas descendre plus bas que *AC*, l'orifice *K* étant supposé infiniment petit. Si cet orifice avoit un rapport sensible au fond *MN*, la surface *OL* descendroit plus bas que *AC*; mais il n'est pas ici question de ce cas.

PROPOSITION X. PROBLEME.

294. *Le vase prismatique* ACKB (Fig. 91) *qui communique avec le tuyau* KL *fermé de tous côtés excepté en* D, *étant traversé de plusieurs diaphragmes* EF, OP, VH *dans lesquels on a percé les petits trous* G, M, N: *on demande la loi suivant laquelle ce vase se vuidera par le petit orifice* D? Fig. 91.

SOLUTION.

1°. Soit *TB* la hauteur primitive du fluide dans le vase *ACKB*; & qu'au bout d'un certain temps la surface de cette eau parvienne en *ab*. On trouvera, par la méthode de l'article 262, que dans la

première poſition, la hauteur dûe à la vîteſſe en D, eſt repréſentée par

$$TB \times \frac{G^2M^2N^2}{G^2M^2N^2+D^2M^2N^2+D^2G^2N^2+D^2G^2M^2},$$

& que dans la ſeconde, la hauteur dûe à la vîteſſe en D, eſt repréſentée par

$$Tb \times \frac{G^2M^2N^2}{G^2M^2N^2+D^2M^2N^2+D^2G^2N^2+D^2G^2M^2};$$

Il ſuit de ces expreſſions qu'on aura le temps que le fluide met à s'abaiſſer de B en F, ſi l'on cherche le temps que le fluide mettroit à s'abbaiſſer de B en F, dans l'hypothèſe où les diaphragmes EF, OP, VH ſeroient anéantis, & qu'enſuite on diviſe ce dernier temps par $\sqrt{n}$, n étant la valeur de la fraction qui multiplie ci-deſſus TB ou Tb. Ce réſultat ſe trouve par la méthode de l'article 279.

2°. Quand la ſurface du fluide parvient en EF, le mouvement eſt le même que ſi le diaphragme EF n'exiſtoit pas; ou, ce qui revient au même, comme ſi l'orifice G étoit infini par rapport aux autres M, N, D. Faiſant donc $G = \infty$, on trouvera que la ſurface de l'eau étant en EF, la hauteur dûe à la vîteſſe en D, eſt $TF \times \frac{M^2N^2}{M^2N^2+D^2N^2+D^2M^2}$,

& que la ſurface étant dans la poſition indéterminée ef, la hauteur dûe à la viteſſe en D, eſt $Tf \times \frac{M^2N^2}{M^2N^2+D^2N^2+D^2M^2}$. D'où l'on voit, comme

tout-à-l'heure, que le temps de l'écoulement qui répond à *FP*, ſe déterminera par le moyen de l'article déja cité 279.

3°. Pareillement, lorſque la ſurface de l'eau ſera en *OP*, il faudra faire $M = \infty$, & on trouvera, toujours par le même article 279, le temps de l'écoulement qui répond à *PH*. Ainſi de ſuite pour tant de diaphragmes qu'on voudra. Enſuite ajoutant enſemble tous ces temps partiels, on connoîtra le temps total que la ſurface de l'eau met à s'abaiſſer d'une hauteur propoſée. C. Q. F. T.

Corollaire I.

295. On voit par les expreſſions des hauteurs dûes aux différentes vîteſſes du fluide en *D*, qu'à meſure que la ſurface de l'eau s'abaiſſe de *B* en *F*, la vîteſſe en *D* diminue juſqu'à ce que la ſurface ſoit parvenue en *F*; qu'alors la vîteſſe augmente, puis diminue juſqu'à ce que la ſurface ſoit parvenue en *P*; qu'alors elle augmente, puis diminue juſqu'à ce que la ſurface ſoit parvenue en *H*; qu'alors elle augmente, puis diminue à meſure que la ſurface continue de deſcendre. Ainſi de ſuite, s'il y avoit un plus grand nombre de diaphragmes & d'ouvertures. Les diſtances des diaphragmes peuvent être tellement réglées, que le jet par l'orifice *D* varie d'une quantité donnée, à meſure que le fluide paſſe d'un compartiment à l'autre du réſervoir. En effet, ſuppoſons, par exemple, que toutes les ouvertures *G*, *M*, *N*, *D* ſoient égales; & ſi nous voulons que les vîteſſes en *D* ſoient

égales, lorſque la ſurface du fluide eſt ſucceſſivement en B, F, P, H : égalons entr'elles les hauteurs dûes à ces vîteſſes ; nous aurons $TB \times \frac{1}{4} = TF \times \frac{1}{3} = TP \times \frac{1}{2} = TH \times 1$, & par conſéquent $TH = HP = PF = FB$. D'où l'on voit que les hauteurs TB, TF, TP, TH étant en progreſſion arithmétique décroiſſante dont la raiſon eſt TH, la vîteſſe en D ſera conſtamment dûe à la hauteur TH, quand la ſurface du fluide ſera en B, F, P, H.

Cette théorie eſt conforme à une expérience de M. Mariotte. Voyez la Fig. 83 de ſon *Traité du Mouvement des Eaux*, avec le diſcours qui y eſt relatif. L'explication que l'Auteur donne de cette expérience, eſt erronée.

COROLLAIRE II.

296. La même théorie eſt facilement applicable à l'hypothèſe où le réſervoir contiendroit des fluides différens. Car ſoit (Fig 92) un vaſe pareil à celui de la Figure 91 ; mais pour plus de ſimplicité, n'y mettons que deux diaphragmes EF, OP, avec les petites ouvertures M, N, D. Que les trois compartimens $AEFB$, $EOPF$, $OCKLP$ contiennent trois fluides de différentes eſpèces. Suppoſons qu'au premier inſtant où la ſurface du fluide ſupérieur eſt en AB, la vîteſſe de ce fluide en M, ſoit dûe à la hauteur BS analogue à BF; la vîteſſe du fluide $EOPF$ en N, ſoit dûe à la hauteur SV analogue à FP; la vîteſſe du fluide $OCKLP$, en D, ſoit dûe à la hauteur TV analogue à TP. Ayant nommé x la hauteur BS, y

Fig. 92.

la

la hauteur SV, z la hauteur VT, θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a, Q chacun des volumes égaux de liqueur qui paſſent par chacune des trois ouvertures M, N, D, dans un même temps t que je ſuppoſe infiniment petit, pour que la ſurface AB ne s'abaiſſe pas, du moins ſenſiblement : on aura d'abord (245),

pour la dépenſe de l'ouverture M, $Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{\theta}$;

pour la dépenſe de l'ouverture N, $Q = \frac{2tN\sqrt{ay}}{\theta}$;

pour la dépenſe de l'ouverture D, $Q = \frac{2tD\sqrt{az}}{\theta}$.

Ces équations donnent $\frac{M^2 x}{N^2} = y$, $\frac{M^2 x}{D^2} = z$.

Cela poſé, en faiſant de plus la peſanteur ſpécifique du fluide $AEFB = \varpi$, celle du fluide $EOPF = \varpi'$, celle du fluide $OCKLP = p$, $BF = b$, $FP = c$, $PT = f$; & obſervant que les hauteurs BS & BF, SV & FP, VT & PT qui répondent ſeulement deux à deux à un même fluide, doivent être multipliées chacune (17) par la peſanteur ſpécifique du fluide correſpondant pour pouvoir être réduites à une même unité de meſure : on aura $x \times \varpi + y \times \varpi' + z \times p = \varpi \times b + \varpi' \times c + p \times f$. Comparant cette équation avec les précédentes, on trouvera

$$x = \frac{N^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pf)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2}.$$

$$y = \frac{M^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pf)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2},$$

$$z = \frac{M^2 N^2 (\varpi b + \varpi' c + pf)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2}.$$

Les hauteurs dûes, pour le premier inſtant, aux vîteſſes en M, N, D, étant ainſi déterminées, ſuppoſons qu'après un certain temps la ſurface du fluide ſupérieur ſe ſoit abaiſſée en ab, & qu'en conſéquence la ſurface du ſecond ait deſcendu en ef, celle du troiſième en op. Il eſt clair qu'on aura toujours $bf = BF$, $fp = FP$, & que la ſeule hauteur Tp du dernier fluide eſt variable. Ainſi en nommant k la hauteur Tp, on trouvera, par la même méthode, que pour cette poſition quelconque des trois fluides,

la hauteur dûe à la vîteſſe en M $\left\{ = \frac{N^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pk)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2} \right.$,

la hauteur dûe à la vîteſſe en N $\left\{ = \frac{M^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pk)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2} \right.$,

la hauteur dûe à la vîteſſe en D $\left\{ = \frac{M^2 N^2 (\varpi b + \varpi' c + pk)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2} \right.$.

COROLLAIRE III.

297. Pour faire une application très-ſimple de l'article précédent, ſuppoſons qu'il n'y ait que deux fluides, ou que le fluide ſupérieur $AEFB$ ſoit anéanti avec le diaphragme EF; que $OCKLP$ ſoit de l'eau, & $EOPF$ de l'air. On aura d'abord $b = 0$, $M = \infty$, $\frac{\varpi'}{p} = \frac{1}{850}$. De plus les preſſions de l'air extérieur

ſur N & ſur D ſe faiſant équilibre (70), on doit faire $c = 0$. Donc la hauteur dûe à la vîteſſe de l'air à ſon paſſage en N eſt exprimée par $k \times \frac{D^2 \times 850}{D^2 + 850 N^2}$; & la hauteur dûe à la vîteſſe de l'eau au ſortir de l'orifice D eſt exprimée par $k \times \frac{N^2 \times 850}{D^2 + 850 N^2}$. Lorſque l'ouverture D eſt infiniment petite par rapport à l'ouverture N, la première hauteur devient nulle, & la ſeconde devient k, comme cela doit être. Si les deux ouvertures N, D ſont égales, les vîteſſes de l'air en N, & de l'eau en D ſont égales, & les hauteurs qui leur ſont dûes, ſont exprimées chacune par $\frac{850}{851} k$, &c.

On peut, à l'aide de cette théorie, prendre une idée claire & préciſe de la vîteſſe avec laquelle le vin ſort d'un tonneau par un trou fait à l'un de ſes fonds, quand l'ouverture pratiquée à la paroi ſupérieure, & deſtinée à introduire de l'air dans le tonneau, eſt fort petite.

SECTION III.

Du mouvement des eaux à leur ſortie d'un vaſe mobile, par une ouverture.

298. Les problêmes dont je vais donner ici la ſolution, peuvent avoir leur application dans la pratique. Si par exemple un ſeau rempli d'eau monte ou deſcend d'un mouvement qui ne ſoit pas uni-

forme, & qu'on veuille connoître la pression du fluide sur chaque point des parois ou du fond, ou ce qui revient au même, la hauteur qui seroit dûe à la vîtesse du fluide à sa sortie par une petite ouverture percée en un endroit quelconque du vase; si de même on vouloit déterminer la position qu'une masse fluide doit prendre dans un vase qu'on fait mouvoir d'un mouvement accéléré ou retardé sur un plan, & la pression qui en résulte sur un point quelconque du vase, &c: toutes ces questions demandent, pour être résolues, de nouveaux principes que je vais exposer. Ceci, indépendamment de toute utilité pratique, pourra servir à exercer les Commençans dans l'usage des principes de Dynamique & d'Hydraulique.

PROPOSITION I. PROBLEME.

Fig. 93. 299. *Le vase* ACDB (Fig. 93) *entretenu constamment plein jusqu'en* AB, *étant entraîné verticalement par le poids R, au moyen de la petite corde non pesante* HMNR *qui passe sur les deux poulies M & N: on demande la pression que le fluide exercera sur la partie* pq *infiniment petite du fond?*

SOLUTION.

Soit nommée P la somme des masses du vase $ACDB$ & de l'eau qu'il contient; & soit G le centre de gravité de cette masse totale. Supposons que si les deux corps R & P avoient été abandonnés à l'action libre de la pesanteur, ils eussent parcouru en un instant les petits espaces égaux Rt, Gx; mais

qu'à cause de la réaction qu'ils exercent l'un sur l'autre, le corps R parcoure Rr, & le corps P parcoure Gy. En nommant g la gravité naturelle Gx ou Rt, f la force accélératrice simple Gy ou Rr, on aura (El. de Dynam. art. CXVII) l'équation $R(g - f) = P(g + f)$; d'où l'on tire $f = \frac{g(R - P)}{R + P}$. Ainsi les deux corps R & P se meuvent, l'un en descendant, l'autre en montant, d'un mouvement uniformément accéléré, puisque la force accélératrice f est à la gravité g dans le rapport constant de $R - P$ à $R + P$. Maintenant, la force qui pousse de bas en haut chaque particule de la masse P étant exprimée par xy ou par $g + f$ ou $\frac{2gR}{R+P}$, il est clair que si l'on imprimoit un mouvement égal & contraire au système de toutes ces particules, il demeureroit en équilibre. Or dans ce dernier cas, en vertu de la force $\frac{2gR}{R+P}$ qui agit verticalement de haut en bas sur chaque particule du fluide, il doit résulter contre un point quelconque du fond ou des parois une pression qui est à la pression que le même point supporteroit si le fluide étoit soumis à la seule action de la pesanteur, comme $\frac{2gR}{R+P}$ est à g, ou comme $2R$ est à $R + P$. Ainsi puisqu'en vertu de la pesanteur, la pression que l'aire pq souffre, est exprimée par $\varpi \times pq \times hq$ (39), ϖ étant la pesanteur spécifique du fluide, il s'ensuit

que dans l'hypothèſe de notre problême, la preſſion que l'aire pq ſouffre eſt exprimée par $\varpi \times pq \times hq \times \frac{2R}{R+P}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

300. Il ſuit de-là que ſi le fluide s'échappe par la petite ouverture pq, ſa vîteſſe ſera dûe à la hauteur $hq \times \frac{2R}{R+P}$; & que pour déterminer la quantité de liqueur qui ſort pendant un temps propoſé, il ne faut que mettre dans l'article 244, $h \times \frac{2R}{R+P}$ à la place de h, en conſervant toutes les autres dénominations. La quantité dont il s'agit eſt donc donnée par l'équation $Q = \frac{2tK}{\theta} \sqrt{\left[\frac{2ahR}{R+P}\right]}$.

Lorſque le vaſe n'eſt pas entretenu conſtamment plein, il eſt plus difficile de déterminer l'écoulement, parce que le poids P devient variable, ainſi que la hauteur du fluide dans le vaſe.

COROLLAIRE II.

301. On voit par l'équation $f = \frac{g(R-P)}{R+P}$ que ſi $R = P$, on aura $f = 0$, $\frac{2R}{R+P} = 1$. Alors le vaſe eſt en repos; & l'écoulement ſe fait entièrement comme dans l'article 244. La même choſe auroit lieu ſi le vaſe $ACDB$ ſe mouvoit verticalement avec un mouvement uniforme.

Si $R = 0$, on aura $\frac{2R}{R+P} = 0$. La preſſion du fluide ſur pq s'évanouit, & il ne ſortira point de liqueur par l'orifice pq. C'eſt ce qui eſt d'ailleurs évident; car tous les points de la maſſe P deſcendront par la peſanteur naturelle avec la même vîteſſe.

Si le poids R eſt infini, il faut négliger P en comparaiſon de R; & alors $\frac{2R}{R+P} = 2$. Ainſi la hauteur dûe à la vîteſſe en p eſt $2hq$; & on a $Q = \frac{2tK\sqrt{2ah}}{\theta}$.

Si les deux poids P & R étant des quantités finies, on avoit $P > R$, le poids P deſcendroit & le poids R monteroit; & pour déterminer leur mouvement, il ne faudroit que faire f négative. On trouve que dans ce cas, comme dans le premier, la hauteur dûe à la vîteſſe en p eſt $hq \times \frac{2R}{R+P}$, & que la quantité de liqueur écoulée eſt toujours donnée par l'équation $Q = 2tK\sqrt{\left[\frac{2ahR}{R+P}\right]}$.

PROPOSITION II. PROBLEME.

302. *Le vaſe* ACDB (Fig. 94) *qui contient de l'eau étant entraîné le long du plan horiſontal* DQ, *au moyen du poids* R *attaché à la corde* HNR *qui paſſe ſur la poulie* N *de renvoi : on demande la preſſion que ſouffrira un point quelconque des parois du vaſe ?* Fig. 94.

SOLUTION.

Je nomme, comme ci-dessus, P la somme des masses du vase & de l'eau qu'il contient. Supposons qu'en un instant le corps R eût parcouru par sa pesanteur naturelle le petit espace Rt, mais qu'à cause du corps R qu'il entraîne, il ne parcoure que Rr, tandis que P parcourt le petit espace Cc égal à Rr. Nommant g la gravité naturelle, f la force accélératrice Rr ou Cc, on trouvera sans peine (El. de Dynam. art. CXXIII) l'équation $R(g-f)=Pf$ ou $f=\frac{gR}{R+P}$. On voit donc que chaque particule du fluide est poussée dans le sens DQ par une force $\frac{gR}{R+Q}$, & que si par conséquent on imprimoit une force égale & contraire au systême, il demeureroit en repos. Or dans ce dernier cas, chaque particule fluide est soumise à l'action de deux forces, l'une verticale qui est la pesanteur g, l'autre horisontale qui est $\frac{gR}{R+P}$; & ces deux forces produisent une résultante exprimée par $g \times \frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$. Ainsi pour qu'il y ait équilibre dans le fluide, il faut (34) que la surface de ce fluide coupe perpendiculairement la direction de la résultante qu'on vient de trouver; & comme cette même force est toujours constante en quantité & en direction, on voit évidemment que la surface du fluide doit être un plan

incliné OM tel que menant l'horisontale OE à la verticale ME, on ait $\frac{OE}{OM} = \frac{R+P}{\sqrt{[R + (R+P)^2]}}$.

Cela posé, si d'un point quelconque T des parois du vase on tire la droite TZ perpendiculaire à la surface OM du fluide, il est clair que la pression soufferte par l'aire infiniment petite Tt, dans l'hypothèse de notre problême, est à la pression qu'elle souffriroit sous la profondeur TZ si le fluide étoit soumis à la seule action de la pesanteur dans un vase en repos, comme $\frac{g\sqrt{[R^2 + (R^2 + P)]}}{R+P}$ est à g, ou comme $\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}$ est à $R+P$. La première pression est donc représentée par $Tt \times TZ \times \frac{\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

303. Connoissant la pression que l'aire Tt souffre, on connoîtra la hauteur dûe à la vîtesse avec laquelle le fluide s'échapperoit par la petite ouverture Tt, & la quantité de liqueur qui s'écouleroit en un temps donné, le vase étant supposé recevoir par une affusion latérale autant d'eau qu'il en dépenseroit par l'ouverture Tt. Ce problême est analogue à celui de l'article 300.

REMARQUE.

304. On doit observer que la surface du fluide demeure inclinée tant que le mouvement du corps R dure, & que ce mouvement est uniformément accéléré.

Mais ſi le vaſe après s'être mu pendant un certain temps d'un mouvement uniformément accéléré, parvient au repos ou à un mouvement uniforme, la ſurface de l'eau perd la poſition inclinée, & finit par ſe mettre dans un plan horiſontal. C'eſt ce qui eſt évident par notre ſolution; car alors on peut ſuppoſer $R = 0$, la force f eſt nulle, & la ſurface de l'eau, qui doit être perpendiculaire à la direction de la force qui preſſe chaque particule ſituée dans cette même ſurface, eſt néceſſairement horiſontale, puiſqu'il n'y a plus que la peſanteur naturelle qui agiſſe ſur les particules du fluide.

Le problême précédent ſe réſoudroit avec la même facilité, ſi au lieu de faire gliſſer le vaſe ſur un plan horiſontal, on le faiſoit gliſſer ſur un plan incliné.

NOTES SUR LE CHAPITRE I.

J'ai expoſé dans le Chapitre précédent la théorie du mouvement des fluides qui ſortent par de *petites* ouvertures, des vaſes où ils ſont contenus. Cette théorie eſt preſque toujours ſuffiſantes pour les beſoins de la pratique où il eſt rare que les écoulemens ſe faſſent par des orifices aſſez conſidérables pour exiger des déterminations fondées ſur d'autres principes que ceux dont je me ſuis ſervi. Mais les Lecteurs Géomètres ne ſeront pas pleinement ſatisfaits; ils demanderont des ſolutions auſſi générales que l'analyſe eſt capable de les

donner. Les notes ſuivantes ſont deſtinées à remplir cet objet. Elles ont été compoſées d'après les ſçavantes recherches de MM. Daniel Bernoulli, Jean Bernoulli, Maclaurin, d'Alembert, Euler. Mais je n'ai pas ſuivi littéralement ces illuſtres Géomètres; j'ai ſimplifié les calculs autant qu'il m'a été poſſible; & on trouvera d'ailleurs ici quelques nouveaux problêmes qui m'ont paru curieux & utiles.

Note 1. (*Art.* 228.)

I. Pour parvenir à déterminer en général le mouvement des fluides par le moyen du principe d'égalité de preſſion, rappellons-nous ici d'abord les conſéquences que nous avons vu dériver de ce principe, dans les notes ſur le premier Chapitre de l'Hydroſtatique. Voici celle qui s'applique ſpécialement à notre objet préſent. Quelles que ſoient les forces dont une maſſe fluide en équilibre puiſſe être animée, ſi l'on conçoit dans cette maſſe un canal de figure quelconque, rentrant en lui-même, la liqueur contenue dans ce canal ſera en équilibre indépendamment du reſte de la maſſe : c'eſt-à-dire, que ſi l'on imagine que le reſte du fluide ſe durciſſe ſans pouvoir changer de place, ni de volume, il y aura équilibre dans le canal, comme auparavant. Rien n'eſt plus évident. Car le fluide contenu dans le canal demeure toujours dans le même état de compreſſion, & chacune de ſes particules eſt toujours également preſſée en tout ſens; il n'y a par conſéquent aucune raiſon pour que l'équilibre ſe rompe.

Fig. 95. II. En conséquence de cette loi, considérons dans un fluide en équilibre (Fig. 95) quatre points, M, N, K, H, pris où l'on voudra, mais situés dans un même plan, & formant entr'eux un canal rectangulaire $MNKH$. Ce canal sera en équilibre. Ayant choisi à volonté le point fixe E, & ayant mené, pour le point M, les coordonnées rectangles $EP = x$, $PM = y$, l'une parallèle à MH, l'autre à MN, supposons que toutes les forces auxquelles les particules du fluide sont soumises, agissent dans le plan EPM, & que par conséquent chacune d'elles soit réductible à deux autres, l'une parallèle à EP, l'autre à PM. Nommons P & P' les forces qui poussent les points M & N parallèlement à EP; Q & Q' les forces qui poussent les points M & H parallèlement à PM; & que ces différentes forces soient des fonctions de x, de y & de constantes. De plus faisons $MH = \delta x$, $MN = \delta y$. Ces différentielles δx, δy sont relatives au changement qui arrive lorsqu'on passe de la considération du point M à celle d'un autre point H ou N qui en est infiniment proche, tandis que je conserve les différentielles dx & dy pour indiquer le changement qui arrive lorsqu'une *même* particule passe du lieu qu'elle occupe au lieu contigu. Elles se trouvent les unes & les autres par les mêmes règles; & on doit observer que dans les différentielles d'une fonction relative aux mêmes coordonnées x & y, δx & dx ont toujours le même coëfficient, & que δy & dy ont aussi le même coëfficient. Cela posé, il est clair qu'en vertu de la force Q

la preſſion de la colonne MN ſur le point N eſt $Q\delta y$; & qu'en vertu de la force P', la preſſion de la colonne NK ſur le point K, eſt $P'\delta x$. La première preſſion ſe tranſmet, comme la ſeconde, au point K; & en les ajoutant enſemble, on aura $Q\delta y + P'\delta x$ pour la preſſion totale que ce même point K ſouffre de la part du fluide MNK. De même, en vertu de la force P la preſſion de la colonne MH ſur le point H eſt $P\delta x$; & en vertu de la force Q' la preſſion de la colonne HK ſur le point K eſt $Q'\delta y$. Ajoutant enſemble ces deux preſſions, on aura $P\delta x + Q'\delta y$ pour la preſſion totale que le point K ſouffre de la part du fluide MHK. Or pour qu'il y ait équilibre, il faut que le point K ſoit également preſſé par le fluide MNK, & par le fluide MHK. On aura donc $Q\delta y + P'\delta x = P\delta x + Q'\delta y$, & par conſéquent $(P' - P)\delta x = (Q' - Q)\delta y$. Mais il eſt évident que $P' - P$ eſt la différentielle de P en ne faiſant varier que y; & que $Q' - Q$ eſt la différentielle de Q en ne faiſant varier que x. Donc en ſuppoſant $P' - P = A\delta y$, $Q' - Q = A'\delta x$, on aura $A\delta y.\delta x = A'\delta x.\delta y$, ou $A = A'$. Par conſéquent l'état d'équilibre demande que *la différentielle de* P, *priſe en ne faiſant varier que* y, *& diviſée par* δ y, *ſoit la même que la différentielle de* Q, *priſe en ne faiſant varier que* x, *& diviſée par* δx.

On énonce ordinairement cette propoſition d'une manière commode & abrégée que voici, $\frac{\delta P}{\delta y} =$

$\frac{\delta Q}{\delta x}$, ou ce qui revient au même, $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

III. Il eſt également facile de trouver les conditions de l'équilibre, quand les forces qui agiſſent ſur le fluide, ne ſont pas dans un même plan. Car quelques directions que ces forces ayent, elles peuvent toujours être réduites à trois, dont deux ſoient ſituées dans le plan EPM, & la troiſième ſoit perpendiculaire au même plan. Suppoſons donc que le point M éprouve l'action de trois forces P, Q, R parallèles chacune à chacune des trois coordonnées rectangles x, y, z, dont elles ſont des fonctions. Concevons enſuite huit points fluides M, N, K, H, Q, O, S, R, formant un parallelèpipede rectangle qu'on peut regarder comme compoſé de ſix canaux rectangulaires. Le fluide ſera en équilibre dans chacun de ces canaux. Ainſi l'équilibre dans le canal $MNKH$ donnera $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; l'équilibre dans le canal $MOQH$ donnera $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$; & l'équilibre dans le canal $MNSO$ donnera $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Les trois autres canaux donneroient les mêmes équations. On a donc en général les conditions de l'équilibre d'un fluide ſoumis à des forces quelconques.

Fig. 96. IV. Cela poſé, que le fluide $ABDC$ (Fig. 96) ſoumis à l'action de la peſanteur ſe meuve dans le vaſe qui le contient, ſuivant telle loi qu'on voudra, de manière cependant que chaque point M n'ait que

deux mouvemens, l'un vertical ou parallèle à EP, l'autre horiſontal ou parallèle à PM. On appliquera ſans peine, au moyen de l'article précédent, la même théorie à l'hypothèſe où les particules du fluide auroient, outre le mouvement vertical, deux mouvemens horiſontaux perpendiculaires entr'eux; ce qui eſt le cas le plus composé du problême, puiſqu'on peut toujours réduire un mouvement quelconque aux trois dont nous parlons. Ici je n'en conſidère que deux, pour ſimplifier le calcul. Soient, comme dans l'article II, quatre points fluides M, N, K, H formant un parallèlogramme rectangle; qu'au bout d'un inſtant ils parviennent reſpectivement en m, n, k, h; & ſoient menées à l'axe EP, les perpendiculaires mp, nf, hg, kq. Suppoſons la gravité $= g$, $EP = x$, $PM = y$, $PO = z$, le temps $= t$, la vîteſſe du point M, parallèlement à $EP = u$, la vîteſſe du même point, parallèlement à $PM = v$. On aura $u = \theta . M$, $v = \theta . N$, θ étant une fonction du temps écoulé depuis le commencement du mouvement, M & N des fonctions ſeulement de x & de y. Car le fluide contigu à la paroi BOD coulant le long de cette paroi, on a $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz}$, lorſque $y = z$. Or $\frac{dx}{dz}$ eſt toujours une fonction de x & de z ſeulement, quelque ſoit le temps t. Ainſi puiſque dans ce cas la fonction du temps s'évanouit dans la diviſion de u par v, on doit avoir en général $u = M\theta$, $v = N\theta$, du moins lorſque le

fluide coule dans un vaſe, comme nous le ſuppoſons ici.

IV. Soient $du = d(\theta M) = \theta A dx + \theta B dy + M.T dt$, $dv = d(\theta N) = \theta A' dx + \theta B' dy + N.T dt$, A, B, A', B' étant des fonctions de x & de y, T une fonction du temps, dx & dy les eſpaces parcourus verticalement & horiſontalement par le point M, durant l'inſtant dt. En mettant pour dx ſa valeur udt ou $\theta M dt$, & pour dy ſa valeur vdt ou $\theta N dt$, on aura la force verticale $\frac{du}{dt} = \theta^2 A.M + \theta^2 B.N + M.T$; & la force horiſontale $\frac{dv}{dt} = \theta^2 A'.M + \theta^2 B'.N + N.T$. Or 1°. ſi les particules n'agiſſoient point les unes ſur les autres, la vîteſſe verticale u deviendroit à la fin de l'inſtant dt, $u + g\,dt$. Donc, par le principe de Dynamique de M. d'Alembert, ſi l'on regarde la vîteſſe $u + g\,dt$ comme compoſée des deux vîteſſes $u + du$ & $g\,dt - du$; & ſi l'on conſidère que de ces deux vîteſſes, la première eſt la ſeule qui ſubſiſte, il eſt clair que la ſeconde $g\,dt - du$ doit être telle qu'elle ne change rien à la première, & qu'elle ſoit anéantie. 2°. On verra de même, à l'égard de la vîteſſe horiſontale v, qu'en vertu de la vîteſſe $-dv$, le point M devroit être en équilibre. Par conſéquent, ſi le point M étoit ſoumis à chaque inſtant à l'action des deux forces $g - \frac{du}{dt}$, $-\frac{dv}{dt}$, il demeureroit en équilibre; ce qui donne (art. 11) l'équation fondamentale

$d[g-$

$$\frac{d[g - (\theta^2 A.M + \theta^2 B.N + M T)]}{dy} = \frac{d[-\theta^2 A'.M - \theta^2 B'.N - N.T]}{dx}.$$

V. Une condition essentielle à laquelle cette équation doit toujours satisfaire, c'est que le fluide $MNKH$ en passant dans la position $mnkh$ ne change point de volume, parce qu'on le suppose incompressible. Or on voit que dans l'instant dt, le point M parcourt parallèlement à EP un petit espace $= u\,dt$, & parallèlement à PM un petit espace $= v\,dt$. De plus on voit qu'en N la vîtesse u devenant $u + \theta.B\,\delta y$ & la vîtesse v devenant $v + \theta.B'\,\delta y$, le point N parcourt parallèlement à EP un espace $= (u + \theta B\,\delta y)\,dt$, & parallèlement à PM un espace $= (v + \theta B'\,\delta y)\,dt$; que par des considérations analogues, le point H parcourt parallèlement à EP un espace $= (u + \theta A\,\delta x)\,dt$, & parallèlement à PM un espace $= (v + \theta A'\,\delta x)\,dt$; qu'enfin le point K parcourt parallèlement à EP un espace $= (u + \theta A.\,\delta x + \theta B.\,\delta y)\,dt$, & parallèlement à PM un espace $= (v + \theta A'\,\delta x + \theta B'\,\delta y)\,dt$. Par conséquent on aura

$Ep = x + u\,dt$, $pm = y + v\,dt$;

$Ef = x + (u + \theta B\,\delta y)\,dt$, $fn = y + \delta y + (v + \theta B'\,\delta y)\,dt$;

$Eg = x + \delta x + (u + \theta A\,\delta x)\,dt$, $gh = y + (v + \theta A'\,\delta x)\,dt$;

$Eq = x + \delta x + (u + \theta A\,\delta x + \theta B\,\delta y)\,dt$, $qk = y + \delta y + (v + \theta A'\,\delta x + \theta B'\,\delta y)\,dt$.

Ainſi $Ef - Ep = \theta B \delta y dt$, $fn - pm = \delta y + \theta B' \delta y dt$, $Eq - Eg = \theta B \delta y dt$, $qk - gh = \delta y + \theta B' \delta y dt$, $Eg - Ep = \delta x + \theta A \delta x dt$. D'où l'on voit que mn peut être regardée comme parallèle à MN, & que $mnkh$ peut être cenſé un rectangle dont l'aire $= (\delta y + \theta B' \delta y dt) \times (\delta x + \theta A \delta x dt)$. On aura donc $\delta x . \delta y = (\delta y + \theta B' \delta y dt) \times (\delta x + \theta A \delta x dt)$, & par conſéquent, en effaçant ce qui ſe détruit, & négligeant les infiniment petits du troiſième ordre, $\theta B' \delta x \delta y dt + \theta A \delta x \delta y dt = 0$, ou $A = - B'$, ou ce qui revient au même $\frac{dM}{dx} = - \frac{dN}{dy}$ première équation de condition entre M & N, & par laquelle on voit que $Ndx - Mdy$ doit toujours être une différentielle complette.

VI. De plus comme l'équation fondamentale de l'article IV doit être identique (art. 11), il eſt clair que la partie $\frac{d(M.T)}{dy}$ du premier membre doit être égale à la partie correſpondante $\frac{d(N.T)}{dx}$ du ſecond. Ainſi à cauſe de T conſtant dans ces expreſſions, on aura $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ ſeconde équation entre M & N, par laquelle on voit que $Mdx + Ndy$ doit être une différentielle complette.

VII. Les deux équations $\frac{dM}{dx} = - \frac{dN}{dy}$, $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ ſatisfont entièrement à l'équation fon-

damentale proposée. Car puisqu'on a $\frac{d(M.T)}{dy} = \frac{d(N.T)}{dx}$, le reste de cette équation donnera (θ étant ici constant),

$$A \frac{dM}{dy} + M \frac{dA}{dy} + B \frac{dN}{dy} + N \frac{dB}{dy} = A' \frac{dM}{dx} + M \frac{dA'}{dx} + B' \frac{dN}{dx} + N \frac{dB'}{dx}.$$

Or puisqu'on a $A = \frac{dM}{dx}$, $B = \frac{dM}{dy}$, $A' = \frac{dN}{dx}$; $B' = \frac{dN}{dy}$, on aura $A \frac{dM}{dy} = \frac{dM}{dx} \times \frac{dM}{dy}$; $B \frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dy} \times \frac{dN}{dy} = - \frac{dM}{dy} \times \frac{dM}{dx}$, $A' \frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dx} \times \frac{dM}{dx}$, $B' \frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dy} \times \frac{dN}{dx} = - \frac{dM}{dx} \times \frac{dN}{dx}$, $M \frac{dA}{dy} = M \frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}$,

$M \frac{dA'}{dx} = M \frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dx} = M \frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dx}$, expression qui par la nature du calcul différentiel est la même chose que $M \frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}$, $N \frac{dB}{dy} = N \frac{\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}$;

$N \frac{dB'}{dx} = N \frac{d\left(\frac{dN}{dy}\right)}{dx} = N \frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dy} = N \frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}$.

Substituant toutes ces valeurs dans l'équation précé-

dente, on trouvera que tous ses termes se détruisent, & que par conséquent elle est identique.

VIII. Il y a un cas où l'équation $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ n'a pas lieu nécessairement; c'est celui où l'on auroit $\frac{T}{\theta^2} = b$, b étant une constante, ou $\theta = \frac{1}{a - bt}$, a étant une autre constante. Alors en effaçant dans l'équation fondamentale de l'article IV les termes qui se détruisent en vertu de la condition $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$ qui a toujours lieu, on satisferoit au reste de l'équation en faisant ensorte qu'on eût

$$M\frac{dA}{dy} + N\frac{dB}{dy} + b\,\frac{dM}{dy} = M\frac{dA'}{dx} + N\,\frac{dB'}{dx} + b\frac{dN}{dx}.$$

Cette condition peut s'exprimer d'une autre manière plus commode. Puisque dans la supposition présente l'équation fondamentale de l'article IV donne

$$\frac{d(A.M + B.N + b.M)}{dy} = \frac{d(A'.M + B'.N + b.N)}{dx},$$

il est clair que $dx\left(M\frac{dM}{dx} + N\,\frac{dM}{dy} + b.M\right)$ $+ dy\left(M\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dy} + b.N\right)$ sera une différentielle complette. Retranchant de cette différentielle la quantité

$$dx\left(M\frac{dM}{dx} + N\,\frac{dN}{dx}\right) + dy\left(M\frac{dM}{dy} + N\frac{dN}{dy}\right),$$

qui est aussi une différentielle complette, le reste

$$(N dx - M dy)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) + b(M dx + N dy)$$

ſera encore une différentielle complette, de même que la différentielle $N dx - M dy$ qui eſt toujours auſſi complette en vertu de l'équation $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$.

IX. Les valeurs des fonctions M, N, θ doivent non-ſeulement être compatibles avec l'équation qui exprime la figure des parois du vaſe, & repréſenter l'état primordial du fluide; mais il faut de plus qu'elles ſoient telles qu'à chaque inſtant du mouvement les ſurfaces ſupérieure & inférieure du fluide coupent perpendiculairement les directions des forces qui agiſſent ſur ces mêmes ſurfaces; & qu'enfin les forces dont il s'agit agiſſent de haut en bas dans la ſurface ſupérieure & de bas en haut dans l'inférieure. Lorſque toutes ces conditions n'ont pas lieu à-la-fois, le probléme n'eſt pas ſoluble rigoureuſement. Sur quoi voyez M. d'Alembert, à qui l'on doit cette théorie, dans ſon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, & dans ſes *Opuſcules Math.* tom. I & V. Voyez auſſi les Mémoires que M. Euler a donnés ſur le mouvement des fluides, parmi ceux de l'Académie de Berlin, an. 1755.

On peut ſe faire par-là une idée générale de la méthode rigoureuſe que le principe d'égalité de preſſion fournit pour déterminer le mouvement des fluides. Mais, comme nous venons de le dire, cette méthode demande la coéxiſtence de pluſieurs conditions; & ces conditions peuvent ſouvent être incom-

patibles entr'elles, du moins en toute rigueur. Il y a donc très-peu de cas où le problême puiſſe ainſi être réſolu ; & dans ceux même où il peut l'être, les calculs ſont preſque impraticables par leur longueur. C'eſt pourquoi je ne m'étends pas davantage ſur ce ſujet.

Note 2. (*Art.* 229.)

I. Il eſt conſtant par l'expérience, que lorſqu'un fluide s'échappe d'un vaſe par une ouverture, ſa ſurface demeure toujours horiſontale, du moins juſqu'à ce qu'elle ſoit arrivée fort près du fond. C'eſt d'après cette loi que je donne dans le cours du chapitre précédent toute la théorie des écoulemens par de petites ouvertures. Mais pour déterminer les écoulemens par des ouvertures horiſontales de grandeur quelconque, la plûpart des Auteurs d'Hydraulique font deux hypothèſes générales ; l'une qu'en imaginant le fluide partagé en une infinité de tranches horiſontales, ces différentes tranches s'abaiſſent parallèlement à elles-mêmes ; l'autre que la vîteſſe de chaque tranche ne varie point en direction, c'eſt-à-dire, que tous les points d'une même tranche ont une même vîteſſe verticale.

La première ſuppoſition paroît une ſuite néceſſaire de l'expérience citée. Car puiſque la première tranche conſerve ſon parallèliſme, il ſemble que la continuité du fluide & la force d'adhérence réciproque de tous ſes points demandent que de proche en proche toutes les autres tranches s'abaiſſent parallè-

lement à elles-mêmes. D'ailleurs les mêmes causes qui tendent à entretenir le parallélisme de la première tranche paroissent devoir agir sur les tranches intérieures, & y produire les mêmes effets, du moins à peu près. Quant à la seconde hypothèse, elle ne peut pas être rigoureusement exacte, lorsque le vase n'est pas prismatique & vertical. Car les particules contigues aux parois doivent nécessairement en suivre la direction. Or si ces mouvemens ne sont pas verticaux, ils doivent produire quelques altérations dans le mouvement vertical des particules voisines. Mais comme le nombre des particules d'une tranche qui touchent les parois, est infiniment petit par rapport au nombre des autres particules de la même tranche, on peut supposer légitimement, ou sans craindre d'erreur sensible, que les altérations dont nous venons de parler sont comme nulles, & que tous les points d'une même tranche ont la même vîtesse verticale.

Voilà à peu près les raisons sur lesquelles on établit les deux hypothèses proposées. Elles sont certainement très-admissibles pour la partie supérieure du vase. Il n'en est pas tout-à-fait de même pour celle qui avoisine l'orifice. Car dans cette dernière partie les points fluides se dirigent de tous côtés vers l'orifice suivant des mouvemens obliques ; & on ne peut pas supposer que les mêmes particules individuelles forment une même tranche horisontale, dont tous les points s'abaissent verticalement. Ainsi il est impossible que l'écoulement déterminé, suivant les

deux hypothèſes dont il s'agit puiſſe être exactement conforme à l'expérience. Mais on ſent d'un autre côté que les erreurs de la théorie doivent ſuivre, du moins à peu près, la même loi dans tous les cas. Si l'on a donc ſoin de conſtater ces erreurs par quelques expériences, & de dreſſer en conſéquence des petites tables de correction, rien n'empêchera d'appliquer cette théorie à la pratique, en faiſant dans chaque cas particulier la correction dont il a beſoin. Avec une telle reſtriction, j'adopte ici la même théorie, parce que tout bien peſé, il me paroît qu'on n'a encore rien imaginé de mieux pour repréſenter en général le mouvement des fluides par des formules analytiques qui n'exigent pas des calculs extrêmement compliqués.

Fig. 97. II. Soit donc *ACDB* (Fig. 97) un fluide ſoumis à l'action de la peſanteur dans un vaſe, & qui s'échappe par l'ouverture horiſontale *pq* de grandeur quelconque, pratiquée dans le fond *CD*. Imaginons que ce fluide eſt partagé en une infinité de tranches horiſontales & égales *ABba*, *TVut*, &c qui s'abaiſſent parallèlement à elles-mêmes, & dont chacune a la même vîteſſe verticale dans toute ſon étendue. Toutes ces tranches agiſſent les unes ſur les autres, ſoit en ſe pouſſant ou en s'entraînant; enſorte que ſi la vîteſſe des unes eſt retardée d'un inſtant à l'autre, la vîteſſe des autres eſt accélérée. Il en eſt à cet égard du mouvement des particules fluides comme de celui de pluſieurs corps ſolides, formant un même ſyſtême, dont aucun ne peut ſe mouvoir

ſans agir ſur les autres & ſans éprouver leur réaction. Ayant élevé la verticale pE, & ayant fait

la gravité . . . . $=g$

la hauteur donnée Ep . . . . $=h$

l'aire de l'orifice pq . . . . $=K$

l'aire exprimée par la ligne AB, & qui eſt une fonction de Ep, donnée par la figure du vaſe . . . . $=M$

la hauteur indéterminée EH . . . . $=x$

l'aire exprimée par TV, fonction donnée de x . . . . $=y$

la vîteſſe de la tranche qui ſort de l'orifice . . . . $=u$

la vîteſſe de la tranche $TVut$ . . . . $=v$

le temps . . . . $=t$,

ſuppoſons que dans l'inſtant dt la vîteſſe v devienne $v+dv$, (dv pouvant être poſitive ou négative). Il eſt clair que ſi les tranches n'agiſſoient point les unes ſur les autres, la vîteſſe v, à la fin de l'inſtant dt, deviendroit $v+gdt$. Ainſi puiſqu'elle devient $v+dv$, & que $v+gdt=v+gdt+dv-dv$, on voit que le fluide reſteroit en équilibre ſi chaque tranche n'étoit animée que de la vîteſſe $gdt-dv$. Ces ſortes de vîteſſes qui ſe détruiſent mutuellement & qui varient d'une tranche à l'autre, ſont les unes poſitives, les autres négatives; & on a par conſéquent, ſur toute l'étendue de la hauteur Ep, $\int dx(gdt-dv)=0$, ou en mettant pour dt ſa valeur $\frac{dx}{v}$, $\int\frac{g\,dx^2}{v}-\int dx\,dv=0$. Subſtituant

pour v ſa valeur $\frac{Ku}{y}$, pour dv ſa valeur $\frac{K(ydu - udy)}{y^2}$; nous aurons $\int \frac{gydx^2}{Ku} - \int \frac{Kdx(ydu - udy)}{yy} = 0$. Cela poſé, comme l'intégrale doit être priſe relativement à la hauteur Ep; & que par conſéquent u & du doivent, pour le moment, être regardées comme conſtantes; que de plus ydx eſt une quantité conſtante : nous pouvons mettre notre équation ſous cette forme,

$$\frac{g.ydx}{Ku}\int dx - Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydx\int\frac{dy}{y^3} = 0.$$

Or $\int dx$ devient h; $\int \frac{dx}{y}$ (en ſuppléant convenablement les homogènes) peut repréſenter l'aire que je nomme N, d'une courbe conſtruite ſur l'axe Ep, & dont les ordonnées sont réciproquement proportionnelles aux ~~qui a pour ordonnées les~~ différentes ſections du réſervoir qui répondent aux différens points de Ep; $\int \frac{dy}{y^3}$ repréſente l'aire d'une courbe qui doit s'évanouir lorſque $y = AB = M$ & recevoir ſa valeur complette lorſque $y = K$, & par conſéquent cette aire $= \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}$. De plus $ydx = ABba = M \times Ee$. Donc l'équation deviendra

$$2gh.M^2 \times Ee - 2K^2.M.N.udu + uu \times Ee(K^2 - M^2) = 0,$$

ou bien encore, (en nommant s la hauteur dûe à la vîteſſe u, ce qui donne $uu = 2gs$),

$$\text{(A)} \quad h.M^2 \times Ee - K^2.M.Nds + s \times Ee \times (K^2 - M^2) = 0.$$

Cette équation générale nous sera utile à plusieurs usages.

III. Supposons, en premier lieu, que le vase soit entretenu constamment plein à la hauteur pE; & imaginons qu'à mesure que la surface AB s'abaisse dans un instant en ab, & qu'il sort par conséquent une petite quantité de liqueur, égale à $AB \times Ee$, imaginons, dis-je, que la tranche $ABba$ est remplacée par une autre qui est, pour ainsi dire, créée en sa place, & qui a la même vîtesse qu'elle. Que le produit $K \times z$, de l'orifice K par la ligne z, représente la quantité de liqueur qui sort pendant le temps t. Il est clair qu'on aura $Kdz = M \times Ee$. Par conséquent l'équation (A) deviendra ici

$$hM^2dz - KM^2Nds + (K^2 - M^2)sdz = 0,$$

dans laquelle il n'y a que z & s de variables.

IV. Il est facile d'intégrer cette équation. Car si l'on fait, pour abréger le calcul, $\frac{h}{K.N} = b$, $\frac{M^2 - K^2}{K.M^2N} = f$, on aura $ds + fsdz = bdz$. D'où l'on tire, par la méthode dont nous nous sommes déja servis (not. sur l'art. 101),

$$s = \frac{b}{f}\left(1 - c^{-fz}\right),$$

en prenant c pour le nombre dont le logarithme est 1, & complettant l'intégrale de manière que z & s s'évanouissent en même temps.

V. Si l'on veut connoître la relation entre le temps t & la vîtesse u ou la hauteur s qui lui est dûe, on

obſervera que $dt = \frac{dz}{u} = \frac{ds}{(b - fs)\sqrt{2gs}}$;
Donc, en faiſant $s = y^2$, $\frac{b}{f} = m^2$, $dt = \frac{2}{f\sqrt{2g}} \times \frac{dy}{m^2 - y^2} = \frac{1}{fm\sqrt{2g}}\left(\frac{dy}{m+y} + \frac{dy}{m-y}\right)$, dont l'intégrale eſt $t = A + \frac{1}{fm\sqrt{2g}} \times \log.\left(\frac{m+y}{m-y}\right) = A + \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}.\sqrt{2g}} \times \log.\left(\frac{\sqrt{b}+f\sqrt{fs}}{\sqrt{b}-f\sqrt{fs}}\right)$. Comme on doit avoir $t = 0$, lorſque $s = 0$, & que log. $1 = 0$, dans la logarithmique qui a 1 pour ſoutangente, ainſi que dans celle des tables ordinaires, on aura $A = 0$. Donc l'expreſſion générale du temps eſt

$$t = \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}.\sqrt{2g}} \times \log.\left(\frac{\sqrt{b}+f\sqrt{fs}}{\sqrt{b}-f\sqrt{fs}}\right),$$

qu'on comparera ſans peine à celui qu'un corps grave met à tomber d'une hauteur donnée a; car en nommant θ ce dernier temps, on a $\theta = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$.

VI. De même, ſi l'on veut connoître la relation entre le temps & l'eſpace parcouru z, on mettra dans l'équation $dt = \frac{dz}{u}$ pour u ſa valeur $\sqrt{2gs}$, & pour s ſa valeur trouvée (art. IV); ce qui donnera

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2bg}{f}}.\sqrt{\left[1 - c^{-fz}\right]}}.$$

Soit $c^{-fz} = y$, & par conſéquent $dz = -$

$\frac{dy}{fy}$; on aura la transformée $dt = - \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times \frac{dy}{y\sqrt{[1-y]}}$, ou en faisant $1 - y = xx$, $dt = \frac{2}{\sqrt{(2bgf)}} \times \frac{dx}{1-xx} = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times \left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x} \right)$, dont l'intégrale est $t = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times [\log.(1+x) - \log.(1-x)]$, ou bien en chassant x,

$$t = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times \left[L.\left(1 + \sqrt{[1 - c^{-fz}]}\right) - L.\left(1 - \sqrt{[1 - c^{-fz}]}\right) \right].$$

Il ne faut point ajouter de constante, parce que $z = 0$, donne $t = 0$, comme cela doit être. Par le moyen de cette équation, on connoîtra la quantité d'eau qui s'écoule en un temps donné; car cette quantité $= K \times z$, qu'on peut exprimer maintenant en fonction du temps & de constantes.

VII. Lorsque dans l'hypothèse des quatre articles précédens, l'orifice K peut être regardé comme infiniment petit par rapport aux amplitudes du réservoir, l'équation fondamentale $hM^2dz - KM^2Nds + (K^2 - M^2)sdz = 0$, de l'article III; devient, en négligeant les termes qui contiennent K, $hM^2dz - M^2sdz = 0$, ou $s = h$. D'où l'on voit que la vîtesse au sortir de l'orifice est dûe à la hauteur entière h du réservoir, comme on l'a trouvé (237).

VIII. La manière dont nous avons imaginé (art. III) que le vase $ACDB$ est entretenu constamment plein, a rarement lieu dans la pratique. Il y en a une autre beaucoup plus usitée. Elle consiste à imaginer qne la nouvelle tranche $ABba$, ajoutée à chaque instant pour réparer la dépense qui se fait par l'orifice pendant le même instant, est fournie par une affusion latérale, & qu'elle reçoit sa vîtesse de celle qui la précède en descendant, & qui l'entraîne en vertu de la tenacité réciproque des parties du fluide. Alors il faut faire quelque changement à la méthode de l'article III, pour l'appliquer au cas dont il s'agit.

Soient V la vîtesse de la tranche $ABba$, v la vîtesse de la tranche indéterminée $TVut$, g la gravité, t le temps, $eH = x$. Si la tranche $ABba$ étoit livrée à l'action libre de la pesanteur, elle acquerroit dans l'instant dt la vîtesse gdt. On pourra regarder cette vîtesse gdt comme composée de la vîtesse V & d'une autre $gdt - V$ qui doit être anéantie. Par conséquent, si cette même vîtesse $gdt-V$ existoit seule dans la tranche $ABba$, & si les autres tranches qui répondent à la hauteur ep étoient animées chacune de la vîtesse $gdt - dv$, tout le systême demeureroit en équilibre. On aura donc l'équation $Ee \times (gdt - V) + \int dx\ (gdt - dv) = 0$, qui devient, en négligeant gdt par rapport à V, & faisant comme ci-dessus, $AB = M, pq = K$, Ep ou $ep = h$,

$$- 2 Ee \times K.M.V.u + 2 gh. M^2 \times Ee -$$

$2K^2 M.N.udu + Ee \times u^2.(K^2 - M^2) = 0$,

ou bien encore, en nommant $K \times z$ la quantité d'eau qui s'écoule pendant le temps t, s la hauteur dûe à la vîteſſe u, & conſidérant que $V = \frac{Ku}{M}$, $Ee = \frac{Kdz}{M}$, $uu = 2gs$,

$$hM^2 dz - (K^2 + M^2) s dz - K M^2 N ds = 0,$$

équation qui eſt de la même forme que celle de l'article III, & qui eſt par conſéquent ſuſceptible de calculs analogues à ceux qu'on a faits dans les articles IV, V, VI. On voit qu'il n'y a qu'à changer des coëfficiens conſtans, pour adapter les formules de ces articles au cas préſent.

Quand l'orifice K peut être cenſé infiniment petit, on a ici, comme dans le premier cas, $s = h$.

IX. Soit maintenant un vaſe qui ſe vuide par l'orifice pq ſans recevoir de nouvelle eau. Suppoſons qu'au premier inſtant la ſurface du fluide ſoit en SX, & qu'au bout du temps t elle prenne la poſition indéterminée AB, la hauteur Ep étant ici variable. Il eſt clair que ſi en conſervant d'ailleurs les autres dénominations de l'article II, on fait $Ep = z$, & par conſéquent $Ee = -dz$, l'équation (A) s'appliquera ici, & deviendra

$$M^2 z dz + K^2 M.N ds + s dz (K^2 - M^2) = 0. \qquad \text{(B)}$$

On voit d'abord par cette équation que ſi l'orifice K peut être ſuppoſé infiniment petit, on a $s = z$, & que conſéquemment la hauteur dûe, à chaque inſtant, à la vîteſſe du fluide au ſortir de

l'orifice, eſt celle même du fluide dans le vaſe au-deſſus de cet orifice, quelle que ſoit la figure du vaſe; ce qui revient à l'article 271. Cette même équation s'intègre facilement en général par la méthode employée (not. ſur l'art. 101). Car M & N étant ici des fonctions de z données par la figure du vaſe, l'équation précédente eſt réductible à cette forme,

$$ds + s.A.Zdz + B.Z'dz = 0,$$

dans laquelle Z & Z' ſont des fonctions de z, A & B des quantités conſtantes. Je laiſſe au Lecteur le ſoin d'appliquer la méthode indiquée à cette équation priſe ainſi dans toute ſa généralité; & je me borne à l'examen d'un cas particulier.

X. Suppoſons que le vaſe propoſé ſoit un cylindre vertical. Suivant nos dénominations, M repréſente la ſection horiſontale & conſtante du cylindre, $N = \frac{z}{M}$. Par conſéquent l'équation (B) devient

(C) $$M^2 z dz + K^2 z ds - (M^2 - K^2) s dz = 0,$$

qu'on peut intégrer de deux manières, ou par la méthode citée, ou en ſéparant les indéterminées. Le premier moyen eſt le plus ſimple, & je vais l'employer. Soient d'abord, pour abréger le calcul, $\frac{M^2}{K^2} = m$, $\frac{M^2 - K^2}{K^2} = n$: on aura $z ds - n s dz + m z dz = 0$. Ayant multiplié tous les termes de cette équation par une fonction ϕ de z qui ſoit cenſée la rendre intégrale, ce qui donne

(D) $$\phi z ds - \phi n s dz + \phi m z dz = 0,$$

&

& suppoſant qu'on ait $\phi z s + \int \phi m z\, dz = A$; cette dernière équation donnera

$$\phi z\, ds + s(\phi\, dz + z\, d\phi) + \phi m z\, dz = 0. \quad (E)$$

Comparant terme à terme les deux équations (D) & (E), on aura $\phi\, dz + z\, d\phi = -\phi n\, dz$, & par conſéquent $\frac{d\phi}{\phi} = -(n+1)\frac{dz}{z}$; d'où l'on tire $\phi = Bz^{-(n+1)}$. L'équation $\phi z s + \int \phi m z\, dz = A$ deviendra donc

$$(1-n)sz^{-n} + mz^{1-n} = mH^{1-n},$$

en nommant H la hauteur primitive & donnée Op du fluide, & déterminant la conſtante $\frac{A}{B}$ par la condition que $z = H$ donne $s = 0$, ou qu'au premier inſtant la vîteſſe du fluide ſoit nulle.

Si au premier inſtant le fluide avoit dans le cylindre, par quelque cauſe extérieure, une vîteſſe dûe à une hauteur donnée b, il faudroit déterminer la conſtante A par la condition que $z = H$ donnât $s = b \times \frac{M^2}{K^2}$. On aura donc toujours facilement s en fonction de z & de conſtantes.

On trouvera auſſi ſans peine la relation entre le temps & la vîteſſe, & la relation entre le temps & la hauteur z.

XI. Lorſqu'on a $n = 1$, ou $M^2 = 2K^2$, la formule de l'article précédent donne pour s une valeur indéterminée. Alors il faut remonter à l'équation différentielle (C) qui devient $2z\, dz + z\, ds$

$- s dz = 0$, ou bien $\frac{z ds - s dz}{zz} = - \frac{2 dz}{z}$, dont l'intégrale est $\frac{s}{z} = L. A - L. z^2$. Donc en déterminant la constante A par la condition que $z = H$ donne $s = 0$, on aura

$$s = z\ (L. H^2 - L. z^2).$$

XII. Nous ferons sur ce même exemple une remarque qui s'applique, avec les changemens convenables, à toutes sortes de vases. Supposons que la surface de l'eau immobile au premier instant dans le cylindre s'abaisse de la très-petite hauteur q. On aura $z = H - q$, & en négligeant le quarré & les plus hautes puissances de q, $z^{-n} = (H - q)^{-n} = H^{-n} + n H^{-n-1} q$, $z^{1-n} = (H - q)^{1-n} = H^{1-n} - (1 - n) H^{-n} q$. Substituant ces valeurs dans l'équation générale $(1 - n)\ s\ z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n}$, elle deviendra $H s + n s q - m H q = 0$, ou bien $s = \frac{m H q}{H + n q}$, ou encore, en négligeant le second terme du dénominateur, $s = m q = q \times \frac{M^2}{K^2}$. D'où il suit que la hauteur dûe à la vîtesse de la surface de l'eau dans le cylindre est exprimée par q. Cette surface descend donc dans les premiers instans du mouvement à la manière des corps qui tombent librement par la pesanteur, ou comme s'il n'y

avoit pas de fond dans le cylindre, & que le fluide tombât tout d'une pièce.

De-là on a tiré une objection contre l'hypothèse du parallèlisme des tranches. Il est impossible, dit-on, que le fluide sortant par l'ouverture *p q* moindre que le fond *C D* puisse jamais descendre de la même manière que si ce fond ne lui faisoit aucun obstacle. A cela, on peut répondre que l'objection seroit sans réplique, si sur la hauteur entière *O p* du cylindre les vîtesses des différentes tranches étoient égales entr'elles. Mais en supposant qu'à une petite distance du fond les particules se dirigent vers l'orifice suivant des mouvemens obliques *Q p*, *R q*, & regardant les portions de fluide *C Q p*, *D R q* comme stagnantes, les particules qui répondent à l'espace *p Q R q* se mouvront plus vîte que celles de la partie supérieure *S Q R X* du cylindre ; & conséquemment il pourra se faire que la surface de l'eau descende, pendant les premiers instans, à peu près comme un corps pesant & libre. L'expérience doit seule décider entre ces deux opinions. Or elle apprend qu'il n'y a pas de portion de fluide qui soit rigoureusement stagnante, & que toutes les particules ont une tendance marquée vers l'orifice ; mais que celles qui sont dans le voisinage du trou ont des mouvemens plus rapides que les autres. Il paroît donc que dans cette partie inférieure du vase l'hypothèse du parallèlisme des tranches n'a pas lieu ; mais elle est sensiblement vraie dans toute la partie supérieure. D'ailleurs quand même elle détermineroit l'écoulement

d'une manière erronée pour un temps qui eſt comme infiniment petit, il ne s'enſuit point qu'elle ne ſoit pas propre à repréſenter d'une manière très-approchée les écoulemens qui répondent à des temps finis, ou que du moins on n'en puiſſe tirer, à très-peu de choſe près, les rapports de différens écoulemens. Car, comme nous l'avons déja dit (art. I), les erreurs auxquelles elle eſt ſujette ſuivent les mêmes loix dans tous les cas, & il peut ſe faire que les écoulemens naturels & phyſiques ſoient entr'eux comme les écoulemens déterminés par la méthode dont il s'agit.

XIII. L'équation (A) de l'article II, peut encore ſervir à trouver le mouvement d'une quantité déterminée de fluide peſant ou non, qui ſe mouvroit dans un vaſe, ſoit en vertu de la ſeule peſanteur, ou d'une impulſion primitive donnée au fluide ou en vertu de ces deux forces à la fois. En effet, ayant imaginé d'abord que le fond CD ſoit anéanti, ou qu'on ait $K = CD$, pour permettre au fluide de couler le long du vaſe, ſuppoſons que la portion donnée de fluide occupe, au premier inſtant, l'eſpace $SZKX$, & qu'à la fin du temps t elle ſoit parvenue dans la poſition indéterminée $ACDB$. Il eſt clair qu'en nommant z l'eſpace OE parcouru verticalement par la ſurface du fluide, les quantités M, K, N, h, ſeront des fonctions données de z & de conſtantes, puiſque la figure du vaſe eſt donnée, & que les deux eſpaces $SZKX$, $ACDB$ ſont égaux entr'eux, L'équation qui repréſente le mou-

vement du fluide, ſera donc toujours de cette forme,

$$Z\,dz + AZ'\,ds + BsZ''\,dz = 0,$$

Z, Z', Z'' étant des fonctions de z, A & B des quantités conſtantes. On intégrera cette équation (ce qui eſt toujours facile), de manière qu'elle ſatisfaſſe à la condition de la vîteſſe initiale d'une tranche donnée du fluide.

Quand le fluide n'a pas de peſanteur, le premier terme de l'équation, qui eſt relatif à cette force, s'évanouit; & l'équation devient fort ſimple.

Connoiſſant la relation entre s & z, on trouvera facilement t en s ou en z.

XIV. Après avoir examiné les principaux cas des écoulemens des fluides, il nous reſte encore à déterminer la preſſion qu'un fluide coulant dans un vaſe exerce contre ſes parois. Pour y parvenir facilement, reprenons l'hypothèſe, la conſtruction & les dénominations de l'article II. La vîteſſe avec laquelle chaque tranche devroit tendre à ſe mouvoir pour demeurer en équilibre, étant $g\,dt - dv$, & par conſéquent la force correſpondante de la même tranche étant $g - \frac{dv}{dt}$, on voit qu'en vertu de ces forces $g - \frac{dv}{dt}$ les tranches ſe preſſent les unes les autres, de la même manière que dans un fluide peſant & en repos dans un vaſe les tranches ſe preſſent les unes les autres en vertu de la peſanteur. Donc à la profondeur EH (x), la preſſion de chaque point de la tranche $TVut$ eſt exprimée par

p. 329

$\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$, Cette force qui ſe tranſmet en tout ſens, agit perpendiculairement contre les parois Tt, Vu. Or $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g \times EH - \int \frac{dx\,dv}{dt}$. Mettant pour dv ſa valeur $\frac{K(ydu - udy)}{yy}$, on aura $\int \frac{dx\,dv}{dt} = \frac{K\,du}{dt}\int \frac{dx}{y} - \frac{Kuydx}{dt}\int \frac{dy}{y^3}$. Les intégrations indiquées, doivent être effectuées de manière que l'aire repréſentée par $\int \frac{dx}{y}$ & que je nomme Q, réponde à EH; & que $\int \frac{dy}{y^3}$ s'évanouiſſe lorſque $y = AB$, & reçoive ſa valeur complette lorſque $y = TV = H$. Ainſi en mettant pour ydx ſa valeur $M \times Ee$, on trouvera que la preſſion $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$ qui répond à la hauteur $EH = g \times EH - \frac{K.Q\,du}{dt} + \frac{Ku \times Ee \times (H^2 - M^2)}{2\,dt.\,H^2 M^2}$, expreſſion dans laquelle on ſubſtituera dans chaque cas, pour u & dt leurs valeurs.

Si la valeur de la preſſion, pour quelqu'endroit du vaſe, étoit négative, cela ſignifieroit qu'en cet endroit les tranches n'agiroient pas les unes ſur les autres, & que par par conſéquent le fluide n'y formeroit pas une maſſe continue, ou ſe détacheroit par parties.

XV. Enfin on trouve facilement par les mêmes

principes la force qu'il faut employer pour ſoutenir un vaſe qui donne de l'eau par l'ouverture pq. Car cette force eſt égale à la ſomme des produits de chaque tranche multipliée par la force en vertu de laquelle la même tranche demeureroit en équilibre, par la même raiſon que la force requiſe pour ſoutenir l'effort d'un fluide peſant & en repos dans un vaſe eſt égale à la ſomme des produits de chaque tranche multipliée par la peſanteur. La force dont il s'agit ici eſt donc repréſentée par $\int y\,dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$ $= \int gy\,dx - \int \frac{y\,dx\,dv}{dt}$. La première partie eſt le poids même du fluide ; la ſeconde ſe trouve ſans peine par ce qui précéde.

XVI. On voit par la théorie générale que nous venons d'expoſer, que dans l'hypothèſe du parallèliſme des tranches, on détermine d'une manière aſſez ſimple tout ce qui eſt relatif à l'écoulement des fluides qui ſortent, par des ouvertures horiſontales, des vaſes où ils ſont contenus. La même théorie s'applique également à la recherche du mouvement des fluides dans de longs tuyaux inclinés, quelques ſinuoſités qu'ils puiſſent avoir dans le ſens de leur longueur, pourvu néanmoins que leur courbure ne varie pas trop bruſquement d'un point à l'autre. Il eſt indifférent, quant à la facilité du calcul, de ſuppoſer alors ou que les tranches ſont horiſontales, ou qu'elles ſont perpendiculaires aux parois du tuyau en chaque endroit. En comparant avec l'expérience les réſul-

tats des calculs dans les deux ſuppoſitions, on verra laquelle mérite la préférence. Je n'ai pas beſoin d'ajouter que dans la ſeconde, les tranches ne ſont parallèles entr'elles que de proche en proche & ſur chacun des élémens de la longueur du tuyau.

A l'égard des vaſes qui donnent de l'eau par de grandes ouvertures latérales, leurs écoulemens ne peuvent pas être déterminés par la méthode du parallélisme des tranches. Car lorſque les particules contenues dans le vaſe ſont arrivés aux environs de l'orifice, elles ſe détournent de la verticale, & prennent des directions plus ou moins courbes, tendantes au même orifice. De plus à leur ſortie, elles n'ont pas la même vîteſſe; les plus éloignées de la ſurface du fluide ſe meuvent néceſſairement plus vîte que les autres. Il n'y a donc pas alors d'autre méthode ſimple & commode pour déterminer l'écoulement que celle dont nous nous ſommes ſervis (249), & qui donne des réſultats aſſez conformes à l'expérience.

Note 3. (Art. 256.)

La démonſtration des articles 252 & 254 eſt trop facile à trouver pour que je la donne ici. Mais celle de l'article 256 a beſoin d'être développée.

Fig. 80. I. Je conſerve toutes les dénominations de cet article. Ayant mené au diamètre LN (Fig. 80) les ordonnées infiniment voiſines QR, qr, & tiré au centre O le raïon QO, j'imagine qu'avec le raïon 1 on décrive un arc que j'appelle z, concentrique & ſemblable à l'arc LQ. Il eſt clair qu'on aura LQ

$= r.z$, $QR = r$ sin. z, $OR = r$ cos. z, $LR = r - r$ cos. z, $Rr = d(LR) = rdz$ sin. z, le petit trapèze $RQqr = r^2 dz$ sin. z^2, $VR = VO - OR = nr - r$ cos. z. Par conséquent la quantité élémentaire d'eau qui s'écoule, pendant le temps t, par le petit trapèze $RQqr$, sera exprimée (245) par $\frac{t\sqrt{a}}{\theta} \times 2rrdz \text{ sin. } z^2 \sqrt{[nr - r \text{ cos. } z]}$, c'est-à-dire qu'on aura

$$dQ = \frac{2tr^2\sqrt{ar}}{\theta} \times dz \text{ sin. } z^2 \sqrt{[n - \text{cos. } z]}.$$

II. Pour parvenir à intégrer cette équation, on remarquera que dz sin. $z^2 \sqrt{[n - \text{cos. } z]} = dz(1 - \text{cos. } z^2)\sqrt{[n - \text{cos. } z]} = dz(1 - \text{cos. } z^2) \times$

$$\left[n^{\frac{1}{2}} - \frac{n^{-\frac{1}{2}} \text{cos. } z}{2} - \frac{n^{-\frac{3}{2}} \text{cos. } z^2}{8} - \frac{n^{-\frac{5}{2}} \text{cos. } z^3}{16} - \frac{5n^{-\frac{7}{2}} \text{cos. } z^4}{128} - \frac{7n^{-\frac{9}{2}} \text{cos. } z^5}{256} - \frac{63n^{-\frac{11}{2}} \text{cos. } z^6}{3072} - \&c.\right]$$

Or comme l'intégrale qu'on demande doit s'évanouir lorsque $z = 0$, & recevoir la valeur complette lorsque $z = 360$ degrés, le calcul peut s'abréger considérablement. Car on peut négliger dans l'équation différentielle tous les termes qui renfermeroient cos. z, cos. $2z$, cos. $3z$, cos. $4z$, &c, parce que ces termes en passant dans l'intégrale contiendroient sin. z, sin. $2z$, sin. $3z$, sin. $4z$, &c qui s'évanouissent lorsque $z = 0$, & lorsque $z = 360$ degrés. Par con-

séquent, puisqu'on a en général, $\cos z^2 = \frac{1 + \cos. 2z}{2}$; $\cos. z^3 = \frac{\cos. z + \cos. z \cos. 2z}{2} = \frac{3 \cos. z}{4} + \frac{\cos. 3z}{4}$; $\cos. z^4 = \frac{1}{4} + \frac{\cos. 2z}{2} + \frac{\cos. 2z^2}{4} = \frac{3}{8} + \frac{\cos. 2z}{2} + \frac{\cos. 4z}{8}$, &c, on supposera $\cos. z = 0$, $\cos. z^2 = \frac{1}{2}$, $\cos. z^3 = 0$, $\cos. z^4 = \frac{3}{8}$, $\cos. z^5 = 0$, $\cos. z^6 = \frac{5}{16}$; &c. L'équation à intégrer sera donc

$$dQ = \frac{tr^2\sqrt{(anr)}}{\theta} \times dz \left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \&c\right).$$

D'où l'on tire, en faisant après l'intégration, $z = 360$ degrés $= \frac{2\Pi}{1}$,

$$Q = \frac{2\Pi tr^2 \sqrt{(anr)}}{\theta} \left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \&c\right),$$

qui est la formule de l'article 256.

III. Lorsque $n = 1$, ce qui est le cas de l'article 258, l'équation différentielle $dQ = \frac{2tr^2\sqrt{ar}}{\theta} \times dz \sin. z^2 \sqrt{[1 - \cos. z]}$ devient exactement intégrable. Car si l'on fait $1 - \cos. z = y$, on aura $dz \sin. z^2 \sqrt{[1 - \cos. z]} = ydy\sqrt{[2-y]}$ dont l'intégrale est $y\int dy\sqrt{[2-y]} - \int dy \int dy \sqrt{[2-y]}$ $= -\frac{2y(2-y)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(2-y)^{\frac{5}{2}}}{15} + A = -\frac{2 \sin. z^2\sqrt{(1+\cos. z)}}{3} - \frac{4(1+\cos. z)^{\frac{5}{2}}}{15} + A.$

En déterminant la conſtante A par la condition que l'intégrale s'évanouiſſe, lorſque $z=0$, & reçoive ſa valeur complette, lorſque $z=180$ degrés, on trouvera $\frac{32\,t r^2 \sqrt{(2ar)}}{15\,\theta}$ pour l'expreſſion de la quantité d'eau qui ſort par le demi-orifice LNP; & par conſéquent $\frac{64\,t r^2 \sqrt{(2ar)}}{15\,\theta}$ pour l'expreſſion de celle qui ſort par l'orifice entier $LPNM$.

Not. 4. (*Art.* 261.)

I. Nous avons ſuppoſé dans cet article que l'écoulement par les ouvertures C, E, L (Fig. 82) étoit parvenu à l'uniformité, & que par conſéquent les ſurfaces AD, FG, HK du fluide dans les trois vaſes demeuroient toujours les mêmes. Examinons maintenant la loi ſuivant laquelle le fluide monte dans les vaſes FE, HL au commencement du mouvement, & avant que l'écoulement ne ſoit devenu régulier & permanent.

II. Soient d'abord (Fig. 98) les deux vaſes $ABCD$, $FCEG$ qui communiquent enſemble par la petite ouverture C. Je les ſuppoſe priſmatiques, pour plus de ſimplicité. Que le premier ſoit entretenu conſtamment plein, & que le ſecond laiſſe échapper l'eau par la petite ouverture E. Suppoſons qu'au bout d'un certain temps la ſurface du fluide ſoit parvenue en NO dans le vaſe $FCEG$, & qu'en un inſtant elle parcoure Nn & prenne la poſition no. Nommons t le temps propoſé, θ celui qu'un corps Fig. 98.

grave mettroit à tomber de la hauteur a, h la hauteur CD, x la hauteur DN, A l'aire de la base ou de la section NO du vase CG. Il est évident que dans l'instant dt, x est la hauteur dûe à la vîtesse du fluide en C, & $h - x$ la hauteur dûe à la vîtesse en E. Il n'est pas moins clair (245) que dans ce même instant il sort par l'ouverture C une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Cdt\sqrt{ax}}{\theta}$, & par l'ouverture E, une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Edt\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta}$. Or la différence de ces deux quantités est évidemment égale à $NOon$. Ainsi on aura $\frac{2Cdt\sqrt{ax}}{\theta} - \frac{2Edt\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta} = -Adx$. D'où l'on tire,

$$dt = \frac{A\theta}{2\sqrt{a}} \times \frac{dx}{E\sqrt{(h-x)} - C\sqrt{x}}.$$

III. En supposant d'abord $x = \frac{yy}{h}$, puis $E\sqrt{[hh-yy]} - Cy = Ez$, on réduira l'équation précédente à cette forme,

$$dt = Mdz + \frac{Nzdz}{\sqrt{[P^2 - z^2]}} + \frac{Qdz}{z\sqrt{[P^2 - z^2]}}.$$

M, N, P, Q étant des constantes faciles à déterminer. Cette équation est maintenant aisée à intégrer. Le dernier terme $\frac{Qdz}{z\sqrt{[P^2 - z^2]}}$, le seul qui puisse faire quelque difficulté, s'intégre en faisant $z = \frac{P^2}{u}$; ce qui donne $\frac{Qdz}{z\sqrt{[P^2 - z^2]}} =$

$\frac{-Q du}{P\sqrt{[u^2 - P^2]}}$ dont l'intégrale eſt $\frac{-Q}{P}$ $L.(u + \sqrt{[u^2 - P^2]})$. On trouvera donc toujours la valeur de t en x. Il faut obſerver qu'au commencement du mouvement, le fluide doit avoir une certaine hauteur dans le vaſe CG, pour que l'eau qui paſſe du vaſe $ABCD$ dans l'eau CO, n'y cauſe pas d'ébranlement ſenſible. On ſatisfera à cette condition, en déterminant la conſtante qui doit completter l'intégrale, de manière que quand $t = 0$, DN aït une valeur *donnée* & un peu moindre que h. Je n'écris pas ici tous ces calculs qui ſont très-longs, mais qui n'ont d'ailleurs aucune difficulté.

IV. Soient maintenant (Fig. 99.) tant de vaſes qu'on voudra $ABCD$, $FCGE$, $HELK$, $QLMR$ qui communiquent enſemble & dont le dernier laiſſe échapper l'eau dans l'air. Que le premier ſoit entretenu conſtamment plein, & qu'au bout du temps t les ſurfaces des eaux ſoient en NO, PS, QR dans les vaſes CG, EK, LR. En déſignant par θ & a les mêmes choſes que ci-deſſus, & faiſant $DC = h$, $DN = x$, $OP = y$, $SQ = z$, $RM = q$, la baſe du vaſe $CG = A$, celle du vaſe $EK = B$, celle du vaſe $LR = R$, il eſt évident par l'article II, qu'on aura ces différentes équations Fig. 99. prismatiques

$$\frac{2Cdt\sqrt{ax}}{\theta} - \frac{2Edt\sqrt{ay}}{\theta} = -Adx, \frac{2Edt\sqrt{ay}}{\theta} - \frac{2Ldt\sqrt{az}}{\theta} = -Bdy, \frac{2Ldt\sqrt{az}}{\theta} - \frac{2Mdt\sqrt{aq}}{\theta} = -Rdz.$$

De plus on a toujours $x + y + z + q = h$.

Toutes ces équations combinées ensemble serviront à trouver la valeur de t en x, ou en y, ou en z, ou en q, & à connoître par conséquent les hauteurs auxquelles le fluide parvient dans les vases CG, EK, LR, en un temps proposé. Mais on voit que ces calculs sont fort compliqués.

V. Le problême élégant résolu par M. de Montucla, est analogue à celui de l'article II. Voici en quoi il consiste. Imaginons que le vase $ABCD$ (Fig. 98) soit une source, un ruisseau qui fournit constamment en temps égaux des quantités égales d'eau au vase $FCEG$ qui en laisse échapper une partie par l'ouverture E: on demande la hauteur à laquelle le fluide s'élevera en un temps donné dans le vase $FCEG$?

En observant qu'ici la vîtesse en C est dûe à une hauteur constante que je nomme b, faisant $CN = x$, & conservant les autres dénominations de l'article II, on aura l'équation $\frac{2Cdt\sqrt{ab}}{\theta} - \frac{2Edt\sqrt{ax}}{\theta} = Adx$, ou bien

$$dt = \frac{\theta A}{2\sqrt{a}} \times \frac{dx}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}.$$

Soit $x = yy$: on trouvera $dt = \frac{\theta A}{E\sqrt{a}} \times \left(-dy + \frac{C\sqrt{b}.dy}{C\sqrt{b} - Ey}\right)$, dont l'intégrale est

$$t = M - \frac{\theta Ay}{E\sqrt{a}} - \frac{\theta AC\sqrt{b}}{E^2\sqrt{a}} \times L.(C\sqrt{b} - Ey)$$

$$= M - \frac{\theta A \sqrt{x}}{E \sqrt{a}} - \frac{\theta A C \sqrt{b}}{E^2 \sqrt{a}} L. (C\sqrt{b} - E\sqrt{x}).$$

La conſtante M ajoutée en intégrant, doit être déterminée de manière que quand $t = 0$, x ait une valeur donnée.

A l'égard de la quantité d'eau qui ſort par l'ouverture E, pendant le temps t, elle eſt $\int \frac{2 E d t \sqrt{a x}}{\theta}$

$$= E. A \int \frac{d x \sqrt{x}}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}} = N + A \times \left[- x - \frac{2 C\sqrt{b x}}{E} - \frac{2 C^2 b}{E^2} L. (C\sqrt{b} - E\sqrt{x}) \right].$$

Du reſte nous avons ſuppoſé dans tous ces problêmes que les écoulemens ſe faiſoient par de petites ouvertures. Si on vouloit les réſoudre pour des ouvertures de grandeur quelconque, ſuivant la méthode générale expoſée dans la note 2, on parviendroit à des calculs preſqu'intraitables du côté de l'analyſe. La même choſe doit s'entendre des articles 262, 268, 294.

Note 5. (Art. 273.)

L'équation différentielle du temps, toujours pour un petit orifice, eſt facile à trouver par le moyen de l'article 245. Car ſi l'on fait (Fig. 85) la hauteur primitive & donnée du fluide $K p = h$, $K L = x$, la ſection $E F G H = X$, fonction de x, donnée par la figure du vaſe; il eſt clair que $L p$ étant la hauteur dûe à la vîteſſe du fluide au ſortir de l'orifice quand la ſurface eſt parvenue en $E F G H$, il eſt

clair, dis-je (245), que la quantité élémentaire d'eau qui ſort pendant l'inſtant dt eſt exprimée par $\frac{2Kdt\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta}$. Or cette même quantité = la tranche $EFGHhefg = Xdx$. On aura donc

$$dt = \theta \times \frac{Xdx}{2K\sqrt{a}.\sqrt{[h-x]}}.$$

L'équation analogue pour un orifice horiſontal de grandeur quelconque, ſe trouve par la méthode générale expoſée dans la note 2. Mais pour l'ordinaire ce calcul eſt très-compliqué, & ne peut être d'aucun uſage dans la pratique.

Note 6 (Art. 285.)

La formule donnée dans cet article pour déterminer le temps que la ſurface de l'eau employe à s'abaiſſer de AC en QZ (Fig. 88), ſuppoſe que l'orifice pq peut être cenſé infiniment petit, non-ſeulement par rapport à la largeur du cylindre ſupérieur $ASVC$, mais encore par rapport à celle de l'inférieur $ODHP$, & que par conſéquent la vîteſſe du fluide dans le dernier eſt comme nulle en comparaiſon de la vîteſſe au ſortir de l'orifice. Mais ſi l'on vouloit réſoudre le problême ſans s'aſtreindre à cette ſuppoſition, on y parviendroit aſſez facilement, par la méthode générale de la note 2. Car ſi en conſervant les autres dénominations du préſent article 285, & nommant de plus b la hauteur du tube $ODHP$, z la hauteur LD du fluide au-deſſus de l'orifice; on reprend l'équation (B) de l'article IX

(not, 2),

(note 2), la quantité N ſera ici $\frac{z - b}{A} + \frac{b}{B}$; M ſera A, du moins ſenſiblement, tant que le fluide ſera dans le vaſe ſupérieur $ASVC$, & deviendra B pour le vaſe inférieur $ODHP$; je garde la lettre M pour repréſenter en général cette quantité. Par conſéquent, l'équation (B) deviendra pour le problême actuel,

$$M^2 z dz + \frac{K^2 (z - b) M ds}{A} + \frac{K^2 b M ds}{B} + s dz (K^2 - M^2) = 0,$$

qu'on intégrera par la méthode employée dans l'article X de la même note 2.

Note 7. (*Art.* 287.)

Pour appliquer ce problême général à un exemple, ſuppoſons un vaſe priſmatique qui ſe vuide par un orifice rectangulaire & vertical, pratiqué dans l'une de ſes parois. En nommant A l'aire de la baſe du réſervoir, f le côté horiſontal de l'orifice, b ſon côté vertical, x la hauteur variable du fluide au-deſſus de la baſe inférieure de l'orifice, t le temps de l'écoulement, θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur a : il eſt clair (250 & 287) qu'on aura

$$dt = \frac{-3 \theta A dx}{4 f \sqrt{a} . (x^{\frac{3}{2}} - (x - b)^{\frac{3}{2}})},$$

différentielle qui n'eſt intégrable que par les quadratures des courbes ou par les ſéries.

On voit que dans cet exemple, quoique fort

ſimple, l'expreſſion du temps ne laiſſe pas d'être longue & pénible à déterminer exactement. Quelquefois la valeur du temps eſt affectée de deux ſignes d'intégration, & aucune des intégrales ne peut ſe trouver algébriquement. Mais le problême eſt toujours ſoluble par la méthode des quadratures ou des ſéries.

Note 8. (*Art.* 288.)

I. Après avoir réſolu le problême dont il s'agit ici, dans l'hypothèſe où le vaſe antérieur *ISTL* (Fig. 89) eſt entretenu conſtamment plein, je vais le réſoudre dans le cas où ce vaſe ſe vuideroit ſans recevoir de nouvelle eau. Sous ce nouveau point de vue, la queſtion pourra être utile dans la pratique, lorſqu'on voudra déterminer par la théorie le temps que l'eau employe à ſe mettre de niveau dans deux *ſas d'écluſe* conſécutifs. Voici préciſément en quoi elle conſiſte.

Fig. 100. II. *Le réſervoir* ISTL (Fig. 100) *rempli d'abord juſqu'en* IL *ſe vuide par le petit tuyau* TM *qui communique avec un ſecond réſervoir* AMNC *contenant, au premier inſtant, de l'eau juſqu'en* DE, *& qui en laiſſe échapper par l'ouverture* N. *On ſuppoſe qu'au bout d'un certain temps les deux ſurfaces de l'eau dans les deux réſervoirs ſoient parvenues reſpectivement en* QP & KV; *& on demande la relation des hauteurs verticales* QR, KX, *ainſi que l'expreſſion du temps de l'écoulement ?*

Soient $KX = x$, $KV = X$, fonction de x, don-

née par la figure du vase $AMNC$, $QR = y$, $QP = Y$, fonction de y, donnée par la figure du vase $ISTL$, l'aire de l'orifice $M = M$, celle de l'orifice $N = N$, l'élément du temps $= dt$, θ le temps qu'un corps grave met à tomber de la hauteur donnée a. La hauteur dûe à la vîtesse de l'eau en M étant QF ou $y - x$, il est clair (245) que dans l'instant dt le vase $ISTL$ dépense une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Mdt\sqrt{[a(y-x)]}}{\theta}$ laquelle a, pour autre valeur, $-Ydy$. On a donc cette première équation,

$$dt = \frac{-\theta Y dy}{2M\sqrt{[a(y-x)]}}.$$

De plus, si de la quantité d'eau $\frac{2Mdt\sqrt{[a(y-x)]}}{\theta}$ que le vase $ISTL$ fournit, à chaque instant, au vase $AMNC$, on retranche la dépense $\frac{2Ndt\sqrt{ax}}{\theta}$ que celui-ci fait par l'orifice N, le reste $\frac{2Mdt\sqrt{[a(y-x)]}}{\theta} - \frac{2Ndt\sqrt{ax}}{\theta}$ sera évidemment l'incrément de l'eau dans le vase $AMNC$, incrément qui a pour autre valeur Xdx. Ainsi on aura cette seconde équation

$$dt = \frac{\theta X dx}{2\sqrt{a}.(M\sqrt{[y-x]} - N\sqrt{x})}.$$

Comparant ensemble les deux valeurs de dt, on aura

$$\frac{Y dy}{M\sqrt{[y-x]}} + \frac{X dx}{M\sqrt{[y-x]} - N\sqrt{x}} = 0,$$

équation fondamentale qu'il faudroit intégrer pour en tirer la relation de x à y, & pour parvenir ensuite à l'expression du temps. Cette intégration ne peut pas se faire en général.

III. Lorsque les deux vases sont ou peuvent être censés prismatiques ; ce qui a lieu ordinairement dans les sas d'écluse, l'équation devient homogène, & par conséquent séparable, parce qu'alors Y & X sont des quantités constantes. Soient donc, en ce cas, $Y = A$, $X = B$. On aura

$$\frac{A dy}{M\sqrt{[y-x]}} + \frac{B dx}{M\sqrt{[y-x]} - N\sqrt{x}} = 0.$$

D'où l'on tire, en faisant d'abord $y = xz$, puis $z - 1 = uu$,

$$\frac{dx}{x} = \frac{2A(Nudu - Mu^2 du)}{M.A.u^3 - N.A.u^2 + (M.A + B \cdot M)u - N.A},$$

équation rationnelle, & par conséquent intégrable par des méthodes connues.

On voit par-là qu'en général les deux réservoirs étant prismatiques, x & y peuvent toujours être exprimées en fonctions d'une même variable, & que par conséquent on aura aussi t en fonctions de la même variable.

IV. Il y a un cas très-simple, & qui arrive souvent dans la pratique. Supposons que pendant que l'eau du sas supérieur $ISTL$ passe dans l'inférieur $AMNC$, (l'un & l'autre étant toujours prismatique), le dernier ne perde point d'eau; ou du moins n'en

perde qu'une quantité très-petite & négligeable. Alors on pourra faire $N = 0$; & en complettant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $y = RO = h$, hauteur donnée, & $x = XZ = b$, hauteur aussi donnée : on trouvera

$$Ay + Bx = Ah + Bb.$$

Donc $dt = \frac{-\theta Y dy}{2M\sqrt{a}.\sqrt{[y - x]}} = \frac{-\theta A dy \sqrt{B}}{2M\sqrt{a}.\sqrt{[(B+A)y - Ah - Bb]}}$ dont l'intégrale complettée, de manière que $t = 0$ donne $y = h$, est

$$t = \frac{\theta A \sqrt{B}}{M(B+A)\sqrt{a}} \times \left[\sqrt{(Bh - Bb)} - \sqrt{[(B+A)y - Ah - Bb]}\right].$$

Pour déterminer le moment où l'eau se met de niveau dans les deux sas, il faut faire $x = y = \frac{Ah + Bb}{A + B}$, & alors on trouve

$$t = \theta \times \frac{A.B}{M(B+A)} \times \frac{\sqrt{[h - b]}}{\sqrt{a}},$$

expression simple & commode dans la pratique.

Lorsque $A = B$, cette expression devient

$$t = \theta \times \frac{A}{2M} \times \frac{\sqrt{[h - b]}}{\sqrt{a}}.$$

Note 9. (Art. 291, 292, 293.)

I. La détermination générale du mouvement d'un fluide qui monte ou descend dans un vase submergé

dans un autre vaſe, eſt un problême très-difficile à réſoudre d'une manière exacte & non hypothétique. Auſſi les Géomètres qui l'ont traité, ſont-ils parvenus à des réſultats differens. Les uns ont ſuppoſé que le fluide en paſſant d'un vaſe à l'autre fait une perte de forces vives, ſans s'accorder d'ailleurs entr'eux ſur la manière de meſurer cette perte ; les autres ont abſolument rejetté une telle hypothèſe. Il me paroît qu'en ayant égard comme il convient aux effets des contractions, on peut ſuppoſer que le fluide ſe meut dans les deux vaſes, à-peu-près de même que dans un vaſe ſimple; & voici comment j'enviſage la queſtion.

Fig. 101. II. Soit un vaſe *VMNT* (Fig. 101) percé à ſon fond *MN* d'une ouverture *pq*, & plongé verticalement dans le fluide *BKDF* qui y entre par l'orifice *pq*. Je conçois qu'à l'inſtant où l'on ouvre l'orifice *pq*, les deux portions de fluide *ABPM*, *CFQN* preſſent le fluide inférieur *PQDK* à peu-près de la même manière que feroient deux piſtons appliqués verticalement ſur les baſes *PM*, *QN*. En conſéquence de ces preſſions, le fluide monte dans le vaſe *VMNT* ſans ceſſer de former avec le reſte de la maſſe un même tout continu ; & il y a équilibre à chaque inſtant entre les forces perdues par les colonnes *ABPM*, *CFQN*, & les forces gagnées par le fluide *MGIN* qui monte dans le vaſe *VMNT*. Imaginons que le fluide extérieur *ABPM* + *NCFQ*, & le fluide intérieur *GMNI* ſont partagés en une infinité de tranches horiſontales égales

entr'elles, repréſentées par $Hufh + Xzcx$, & par $OLlo$; & ſuppoſons

la gravité . . . . $= g$
la verticale Sp . . . . $= p$
Rp . . . . $= z$
Ep . . . . $= q$
Yp . . . . $= x$
l'aire exprimée par la ligne GI . . . . $= M$
l'aire exprimée par OL . . . . $= y$
l'aire de l'orifice pq . . . . $= K$
l'aire exprimée $BA + CF$ . . . . $= P$
l'aire exprimée par $PM + NQ$ . . . . $= Q$
l'aire exprimée par $Hu + zX$ . . . . $= s$
la vîteſſe de OL . . . . $= v$
la vîteſſe à l'orifice pq . . . . $= u$
la vîteſſe de la ſection $Hu + zX$ . . . . $= V$
l'élément du temps . . . . $= dt$
la hauteur dûe à la vîteſſe u . . . . $= r$.

Il eſt clair que le fluide deſcendant, animé dans chacune de ſes tranches, de la vîteſſe $gdt - dV$, doit faire équilibre à chaque inſtant au fluide intérieur & aſcendant, animé dans chacune de ſes tranches, de la vîteſſe $gdt + dv$. On aura donc l'équation

$$\int dz(gdt - dV) = \int dx(gdt + dv),$$

ou bien

$$\text{(A)} \quad \int dz(gdt - dV) - \int dx(gdt + dv) = 0.$$

Or $v = \frac{Ku}{y}$, $dv = \frac{K(ydu - udy)}{yy}$, $V =$

$\frac{Ku}{s}$, $dV = \frac{K(sdu - uds)}{ss}$, $dt = \frac{dx}{v}$ $= \frac{dz}{V} = \frac{ydx}{Ku} = \frac{sdz}{Ku}$. L'équation précédente deviendra donc

$$\frac{gsdz}{Ku}\int dz - Kdu\int\frac{dz}{s} + Kusdz\int\frac{ds}{s^3}$$
$$- \frac{gydx}{Ku}\int dx - Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydx$$
$$\int\frac{dy}{y^3} = 0.$$

Les intégrations indiquées doivent être effectuées pour les hauteurs entières p & q. Ainsi $\int dz = p$, $\int dx = q$. Soient pour les mêmes hauteurs, $\int\frac{dx}{y} = N$, $\int\frac{dz}{s} = N'$. De plus remarquons que l'intégrale $\int\frac{dy}{y^3}$ doit s'évanouir lorsque $y = M$, & recevoir sa valeur complette lorsque $y = K$; que pareillement l'intégrale $\int\frac{ds}{s^3}$ doit s'évanouir lorsque $s = P$, & recevoir sa valeur complette lorsque $s = Q$. Remarquons encore que Ee étant la hauteur de la tranche $GIig$, on a $ydx = sdz = M \times Ee$. Sur toutes ces considérations, notre équation se change en

$$\frac{M \times Ee}{K} \times (p - q) - Kdr(N + N')$$
$$+ M \times Ee \times Kr\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2} + \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right) = 0,$$

équation générale qui donne le mouvement du fluide dans les deux vases, & qui s'intégre par les méthodes exposées ci-dessus.

III. Supposons que le vase $VMNT$ soit un cylindre vertical, & que le vase $BKDF$ ait une largeur infinie. Alors le fluide pourra être regardé comme stationnaire dans le vase $BKDF$, les termes $N'.Kdr$, $M \times Ee \times Kr \left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right)$ seront infiniment petits par rapport aux autres, M & p seront des quantités constantes. Par conséquent, notre équation deviendra

$$\frac{M \times Ee}{K} \times (p - q) - K.N.dr + M \times Ee \times Kr \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2}\right) = 0.$$

IV. Si dans cette équation on fait M infini par rapport à K, ou qu'on regarde l'orifice pq comme infiniment petit par rapport à la base MN du cylindre, on aura $r = p - q$. D'où l'on voit que le fluide entre par l'orifice pq avec une vîtesse dûe à l'excès de la hauteur constante du fluide extérieur sur la hauteur du fluide dans le cylindre $VMNT$, comme on l'a supposé dans l'article 291.

V. Lorsqu'on voudra appliquer toute cette théorie à des exemples particuliers, on se souviendra que l'orifice pq étant supposé percé dans un mince fond, la contraction à laquelle la veine fluide est sujette en passant du vase extérieur dans l'intérieur, de-

mande qu'on diminue l'orifice pq dans le rapport de 16 à 10 lorſque cet orifice eſt petit par rapport au fond MN, & dans le rapport de 16 à 13 lorſqu'il devient égal au fond MN. Voilà pour les cas extrêmes. On fera les corrections convenables pour les cas intermédiaires ; & on trouvera que la théorie s'accorde aſſez bien avec l'expérience, ſinon pour le commencement du mouvement, du moins après un certain temps, & lorſque le fluide a acquis quelque hauteur dans le cylindre $VMNT$.

VI. Si on ſuppoſoit, comme dans l'article 293, que le vaſe $VMNT$ contînt de la liqueur au-deſſus du niveau BF & ſe vuidât dans le vaſe $BKDF$, le problême ſe réſoudroit de la même manière. Au lieu de l'équation (A), on auroit l'équation

$$(B)\ \int dx\,(g\,dt - dv) - \int dz\,(g\,dt + dV) = 0\ ;$$

ſur laquelle on fera des remarques & des opérations analogues à celles qu'on a faites ſur l'équation (A).

Note 10. (*Art.* 300.)

Fig. 93. Suppoſons que le vaſe $ABDC$ (Fig. 93) ſe vuide par l'orifice pq, ſans recevoir de nouvelle eau ; & nommons x la hauteur variable qh, X la ſection horiſontale AB qui eſt une fonction de x, donnée par la figure du vaſe, dQ la quantité élémentaire d'eau qui ſort pendant l'inſtant dt. On aura $P =$

$\int X dx$; $dQ = \frac{2Kdt}{\theta} \sqrt{\frac{2aRx}{R + \int X dx}}$. Mais d'un autre côté $dQ = -Xdx$. Ainsi on aura en général

$$dt = \frac{-\theta X dx \sqrt{(R + \int X dx)}}{2K\sqrt{2aRx}},$$

équation d'où l'on tirera tout ce qui concerne l'écoulement du fluide dans l'hypothèse proposée.

Lorsque le vase *ABCD* a un mouvement horisontal comme dans l'article 302, & se vuide sans recevoir de nouvelle eau, il est difficile de déterminer le mouvement du fluide, parce que la force accélératrice qui anime à chaque instant les particules du fluide, varie continuellement tant en direction qu'en quantité. Le problême demande alors, pour être résolu, la mêthode générale de la note I; & les calculs deviennent fort compliqués.

Note II.

Manière de mesurer le déchet que le frottement occasionne dans la dépense d'un orifice.

I. Dans tout ce que j'ai dit jusqu'ici sur l'écoulement des fluides, j'ai considéré les dépenses en elles-mêmes, mettant à l'écart les altérations dont elles peuvent être susceptibles. Or il est indubitable que le frottement contre le circuit de l'orifice peut y produire quelquefois un déchet sensible, sur-tout quand la paroi où l'orifice est pratiqué, est fort épaisse. Examinons donc les moyens d'évaluer ce déchet, Je ne considérerai que de petits

orifices, tels qu'ils ſont preſque toujours dans la pratique. Je commence par les cas les plus ſimples.

II. Suppoſons un vaſe entretenu conſtamment plein à la même hauteur, lequel donne de l'eau par l'orifice circulaire & horiſontal *ABDE* (Fig. 102). Du centre *C* ſoient décrites une infinité de circonférences concentriques *abde*, *mnop*, &c. Les particules qui frottent contre le bord *ABDE* de l'orifice perdent, par cette cauſe, une partie de leur vîteſſe : & comme ces particules ont une adhérence avec les ſuivantes qui forment la circonférence *abde*, que celles-ci ont pareillement une adhérence avec les ſuivantes qui forment la circonférence *mnop*, ainſi de ſuite ; il eſt clair que de proche en proche le frottement contre le bord de l'orifice *ABDE* doit ſe faire ſentir à toutes les particules qui ſortent en même temps, & diminuer conſéquemment la dépenſe. Conſtruiſant donc ſur *AC* comme axe, une courbe *NgqK* dont les ordonnées *AN*, *ag*, *mq*, *CK* repréſentent les vîteſſes correſpondantes aux points *A*, *a*, *m*, *C*, l'aire de cette courbe ſera proportionnelle à la ſomme des vîteſſes ou à la dépenſe totale qui a réellement lieu. Qu'on prenne

Fig. 102.

CA . . . . $= r$

Cm . . . . $= x$

la hauteur dûe à la vîteſſe *mq* . . . . $= X$

le rapport de la circonférence au diamètre . . $= \pi$

le temps de l'écoulement . . . . $= t$

la quantité de liqueur qui ſort pendant ce

temps . . . . $= Q$

le temps employé par un grave à tomber de la hauteur donnée a . . . . $= \theta$.

On aura évidemment (245), l'équation $Q = \frac{2t\sqrt{a}}{\theta} \int \Pi\, x\, dx \sqrt{X}$, intégrale qui doit s'évanouir lorsque $x = 0$, & recevoir sa valeur entière lorsque $x = r$.

III. On voit par-là que connoissant la loi suivant laquelle les particules tiennent les unes aux autres, on connoîtra la fonction X, & que par conséquent on pourra déterminer Q, soit algébriquement, ou par les quadratures des courbes.

Par exemple, supposons que $NgqK$ soit une ligne droite; ce qui ne doit pas s'éloigner beaucoup de la vérité, l'orifice étant regardé comme très-petit. Nommons H la hauteur dûe à la vîtesse centrale CK, h la hauteur dûe à la vîtesse latérale AN, & menons NR parallèle à AC. Les triangles semblables NRK, Nfq donneront $fq = \frac{Nf \times RK}{NR} = \frac{(r - x)(\sqrt{H} - \sqrt{h})}{r}$, & mq ou $\sqrt{X} = \sqrt{h} + \frac{(r - x)(\sqrt{H} - \sqrt{h})}{r} = \frac{x\sqrt{h} + (r - x)\sqrt{H}}{r}$. Donc

$$\int x\, dx \sqrt{X} = \int \left(\frac{x^2 dx \sqrt{h} + (r x dx - x^2 dx)\sqrt{H}}{r} \right)$$

$$= \frac{x^3(\sqrt{h} - \sqrt{H})}{3r} + \frac{x^2 \sqrt{H}}{2}$$ Ainsi en faisant $x = r$, on aura

$$Q = \frac{t \Pi r^2 (\sqrt{aH} + 2\sqrt{ah})}{3\theta}.$$

IV. On ſçait que dans les jets d'eau qui s'élèvent verticalement, le haut de la colonne eſt une eſpèce de pyramide dont le ſommet eſt formé par les molécules centrales qui ſe ſuccèdent. Si l'on prend pour H la hauteur du ſommet de cette pyramide au-deſſus de l'orifice, & qu'on détermine H & Q par une expérience immédiate, on connoîtra h. Car la formule précédente donne

$$h = \frac{(3\theta Q - t \Pi r^2 \sqrt{aH})^2}{4 \Pi^2 t^2 r^4 a}.$$

V. Voici une autre manière de déterminer H & h par les ſeules dépenſes. On préférera celle qui ſatisfait le mieux aux phénomènes.

Suppoſons que la hauteur de l'eau dans le réſervoir étant toujours la même, on ait un ſecond orifice circulaire & horiſontal; & nommons les quantités analogues à H, r, Q par les mêmes lettres accentuées. Les quantités Π, θ. a, t demeurent les mêmes. Il paroît que la hauteur h doit être auſſi la même dans le ſecond orifice que dans le premier; car ſous même hauteur d'eau dans le réſervoir, le frottement de chaque point fluide contre le bord de l'orifice doit être le même; & par conſéquent il doit reſter la même vîteſſe à chaque particule, déduction faite de la perte occaſionnée par le frottement. On aura donc, comme dans l'article III, cette ſeconde équation

$$Q' = \frac{t\Pi r'^2 (\sqrt{aH'} + 2\sqrt{ah})}{3\theta}.$$

De plus en considérant que la loi du frottement doit être la même dans les deux cas, & que par conséquent on peut regarder, par exemple, HA comme le raïon du second orifice, tandis que CA est le raïon du premier, on aura $\sqrt{H} - \sqrt{h} : \sqrt{H'} - \sqrt{h} :: r : r'$, ou

$$r(\sqrt{H'} - \sqrt{h}) = r'(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Maintenant, regardons H, H', h comme les trois inconnues, & supposons que tout le reste soit donné, nous trouverons

$$H = \left[\frac{\theta(Q(3r - r')r'^2 - 2Q'r^3)}{t\Pi\sqrt{a}.(r - r')r^2 r'^2}\right]^2,$$

$$H' = \left[\frac{\theta(Q'r^2(r - 3r') + 2Qr^3)}{t\Pi\sqrt{a}.(r - r')r^2 r'^2}\right]^2,$$

$$h = \left[\frac{\theta(Q'r^3 - Qr'^3)}{t\Pi\sqrt{a}.(r - r')r^2 r'^2}\right]^2.$$

VI. La même théorie est facilement applicable aux orifices qui n'ont pas la forme circulaire. Supposons, par exemple, que le réservoir étant entretenu plein à la même hauteur, l'écoulement se fasse par l'orifice rectangulaire $ABCD$ (Fig. 103). Ayant Fig. 103.
mené du centre O les droites OA, OB, OC, OD, & ayant abaissé OK perpendiculaire à AB, soient menées les droites OP, Op infiniment voisines. Du point O, avec le raïon OP, soit décrit le petit arc PV. Qu'on décrive encore du même point, avec les deux raïons infiniment peu différens Om,

On les deux petits arcs mq, nr. Cela posé, soient $OK = b$, $KB = c$, $KP = x$, $Om = y$, la hauteur dûe à la vîtesse en $O = H$, la hauteur dûe à la vîtesse en $K = h$; & désignons par t, θ, a, les mêmes choses que ci-dessus. Les triangles semblables OKP, PVp donneront $PV = \frac{bdx}{\sqrt{(bb+xx)}}$, & les arcs semblables PV, mq donneront $mq = \frac{bydx}{bb+xx}$. Donc le petit espace $mqrn = \frac{bydydx}{bb+xx}$. En admettant sur la loi du frottement la même hypothèse que dans l'article III, la quantité de liqueur qui sort par le petit orifice $mqrn$ sera exprimée par $\frac{2t\sqrt{a}}{\theta} \times \frac{bydydx}{bb+xx}$ $\times \left(\frac{(\sqrt{(bb+xx)}-y)\sqrt{H}+y\sqrt{h}}{\sqrt{(bb+xx)}}\right)$, dont l'intégrale est (en regardant y seule comme variable) $\frac{t\sqrt{a}.\,bdx}{\theta(bb+xx)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{(3yy\sqrt{(bb+xx)}.\sqrt{H}-2y^3(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{3}$. Faisant $y = \sqrt{(bb+xx)}$, la quantité de liqueur qui sort par l'orifice $POp = \frac{t\sqrt{a}.\,bdx(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3}$ dont l'intégrale est $\frac{t\sqrt{a}.\,bx(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3\theta}$. Faisant $x = c$, la quantité de liqueur qui sort par l'orifice triangulaire $OKB = \frac{t\sqrt{a}.\,bc(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3\theta}$. Donc en

nommant

nommant Q la quantité de liqueur qui ſort par l'orifice entier *ABCD*, on aura

$$Q = \frac{8t\sqrt{a}.bc(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3\theta}.$$

Cette équation fournit les mêmes remarques que celle de l'article III.

VII. Les hauteurs dûes aux vîteſſes des différens points du fluide à la ſortie de l'orifice ont été déterminées pour différens orifices horiſontaux, ſous une même hauteur conſtante d'eau dans le réſervoir. On les déterminera pareillement pour d'autres hauteurs de réſervoir. Par ce moyen, on connoîtra la loi ſuivant laquelle le frottement diminue le mouvement du fluide, ſoit que le vaſe demeure conſtamment plein; ſoit que la hauteur varie, le vaſe ſe vuidant ſans recevoir de nouvelle eau. On aura donc une théorie générale des écoulemens par des orifices horiſontaux, regardés toujours comme très-petits par rapport aux amplitudes du réſervoir. Il ſera facile d'étendre la même théorie aux orifices latéraux. Car un orifice quelconque peut être regardé comme compoſé d'une infinité de petits orifices rectangulaires, déterminés par des lignes horiſontales. Or tous les points de chaque orifice partiel pouvant être cenſés également diſtans de la ſurface du fluide, on trouvera d'abord la quantité d'eau que cet orifice fournit en un certain temps. Enſuite faiſant varier la hauteur du fluide, on trouvera par le calcul la ſomme de toutes les quantités partielles de liqueur dépenſée, ou la quantité totale que l'ori-

fice fournit pendant le temps proposé.

Je ne m'étends pas davantage là-dessus. Je ne cherche pas non plus par la théorie la diminution de vîtesse, que le frottement occasionne dans de longs tuyaux. Tous ces objets seront examinés fort au long dans la suite de ce Traité, & d'une manière plus satisfaisante, par la voie de l'expérience.

CHAPITRE II.

Du mouvement d'oscillation & d'ondulation des fluides.

305. Il a été démontré (210 ou Dynam. art.
Fig. 104. CXXXV) que si un pendule *P* (Fig. 104), suspendu par le moyen du fil *OP*, décrit de très-petits arcs de cercle *Pp*, *Qq*, en oscillant autour du point fixe *O*, toutes ses oscillations sont isochrones ou de même durée, quoique les arcs parcourus *Pp*, *Qq* soient inégaux. Cet isochronisme est fondé sur ce que les espaces parcourus *Pp*, *Qq* sont proportionnels aux forces qui les font parcourir.

Il a été démontré encore (Dynam. art. CXXXVI) que si deux pendules d'inégales longueurs décrivent de petits arcs de cercle, les durées de leurs oscillations sont entr'elles comme les racines quarrées de leurs longueurs.

Fig. 105. 306. Cela posé, soit un tuyau *KLNM* (Fig. 105) uniforme dans sa grosseur, & composé de deux bran-

ches verticales & d'une branche horiſontale. Qu'on y mette une certaine quantité de liqueur. Dans l'état d'équilibre, les deux ſurfaces *AB*, *CD* du fluide ſont de niveau (35). Suppoſons que par une cauſe quelconque la liqueur monte en *EF* dans la branche *KL*, & deſcende par conſéquent en *GH* dans la branche *MN*; qu'enſuite elle ſoit abandonnée à l'action libre de ſa peſanteur. Il eſt clair qu'elle montera & deſcendra alternativement. Soit *P* (Fig. 104) un pendule dont la longueur *OP* eſt la moitié de la longueur *xyz* de la colonne fluide, & qui décrit juſqu'au point le plus bas *I* des arcs *PI* égaux aux eſpaces *AE*. La force qui fait oſciller le fluide eſt l'excès du poids de l'eau contenue dans l'une des branches du ſyphon ſur le poids de l'eau contenue dans l'autre branche. Ainſi quand l'eau monte en *EF* dans la branche *KL*, & que conſéquemment elle deſcend en *GH* dans la branche *MN*, cette force eſt le poids de la colonne *ESTF*, ou le double du poids de la colonne *EABF*. Elle eſt donc au poids de toute l'eau comme 2*AE* eſt à *xyz*, ou comme *AE* eſt à *OP*. D'où il ſuit, 1°. que la longueur *xyz* étant une quantité conſtante, la force qui fait oſciller l'eau eſt toujours proportionnelle à l'eſpace qu'elle lui fait parcourir; & que par conſéquent les oſcillations de l'eau ſont iſochrones entr'elles. 2°. Ces oſcillations ſont de même durée que celles du pendule *P*; car la force qui fait décrire au pendule *P* l'arc *PI*, eſt à la peſanteur du même pendule, comme *PI* eſt à *OP* (Dynam. art.

CXXXV), ou comme AE est à OP; l'eau & le pendule sont donc animés par la même force, & doivent par conséquent faire leurs oscillations dans le même temps.

307. Puisque les oscillations de l'eau suivent les mêmes loix que celles des pendules, si l'on augmente ou diminue la longueur de la colonne d'eau, le temps de ses oscillations augmentera ou diminuera, & suivra la raison doublée de cette longueur.

308. Cette théorie des oscillations des fluides s'applique au mouvement des ondes.

Fig. 106. Soit $ABCDEF$ (Fig. 106) une eau stagnante dont la superficie monte & descende par des ondes successives. Que A, C, E, soient les éminences de ces ondes; B, D, F les cavités intermédiaires qui les séparent. Le mouvement successif des ondes se faisant de manière que les parties les plus hautes A, C, E deviennent ensuite les plus basses, & la force qui fait descendre les plus hautes & descendre les plus basses, étant toujours le poids de l'eau élevée, il est clair que les oscillations des ondes sont de même espèce que celles de l'eau dans le syphon $KLNM$. Si l'on prend donc un pendule dont la longueur soit la moitié des distances entre les lieux les plus hauts A, C, E & les lieux les plus bas B, D, F, les parties les plus hautes A, C, E deviendront les plus basses dans le temps d'une oscillation de ce pendule; & dans le temps d'une autre oscillation elles deviendront les plus hautes. Le pendule fera donc deux oscillations pendant chacune des on-

dulations, c'eſt-à-dire, pendant que chaque onde parcourra l'eſpace compris entre deux ſommités voiſines, ou entre deux cavités voiſines; eſpace qui exprime la *largeur* d'une onde. Et comme un pendule dont la longueur ſeroit quadruple de la longueur du précédent, ne feroit qu'une oſcillation, pendant que celui-ci en fait deux, il s'enſuit que les ondes font leurs oſcillations dans le même temps qu'un pendule qui auroit pour longueur la largeur des mêmes ondes.

309. Suivant l'expérience, un pendule qui a 3 pieds 8 $\frac{1}{2}$ lignes de longueur, fait une oſcillation en 1 ſeconde. Ainſi une onde dont la largeur eſt de 3 pieds 8 $\frac{1}{2}$ lignes, parcourt cette largeur en 1 ſeconde. Par-là, on déterminera le temps d'une ondulation quelconque, puiſque les temps des ondulations ſuivent la raiſon ſous-doublée des largeurs des ondes.

Cette explication du mouvement des ondes eſt due à Neuton. Elle n'eſt, comme il en avertit lui-même, qu'une approximation; car elle ſuppoſe que les parties de l'eau ſe meuvent en lignes droites, comme dans le ſyphon de l'article *306*; au lieu que réellement leur mouvement eſt circulaire en partie.

NOTES SUR LE CHAPITRE II.

Détermination generale des oſcillations d'un fluide dans un ſyphon de figure quelconque.

I. Soit *ABFDEG* (Fig. 107) un ſyphon de figure quelconque, contenant un fluide qui, en vertu d'une cauſe extérieure, ayant été élevé à une certaine hau- Fig. 107.

teur dans la branche $ABFG$, & s'étant abaissé conséquemment dans l'autre branche $DEGF$, est ensuite abandonné à l'action libre de la pesanteur. Ce fluide fera des oscillations qu'il s'agit de déterminer. Il faut, pour cela, connoître la direction que les particules du fluide prennent dans leurs mouvemens. Or, on ne peut guère proposer à ce sujet que deux hypothèses qui soient vraisemblables; l'une que les particules descendent ou montent verticalement, & que par conséquent le fluide étant supposé partagé en tranches horisontales, ces tranches conservent leur parallélisme; l'autre que les particules se meuvent parallèlement à la courbe $Mxyz$ regardée comme l'axe du syphon, ou que le fluide étant supposé partagé en tranches perpendiculaires à la courbe xyz, ces tranches conservent leur parallélisme de proche en proche. Le problème se résoud très-simplement dans la première hypothèse, par la méthode des notes 2 & 9. Je vais le résoudre ici dans la seconde qui a été adoptée par plusieurs savans Géomètres.

II. Supposons qu'au bout d'un certain temps t le fluide soit parvenu dans la position indéterminée $ABFDEG$, & regardons-le comme composé d'une infinité de tranches $OLlo$ égales entr'elles & perpendiculaires en chaque point de la courbe $Mxyz$. La pesanteur qui agit verticalement sur chaque tranche, se décomposera en deux forces, l'une perpendiculaire à la courbe, qu'il faut négliger, l'autre dirigée suivant la courbe, la seule à laquelle il faut avoir égard. Soient

la gravité . . . . $= g$

la surface AB . . . . $= K$

la surface DE . . . . $= G$
la section OL . . . . $= y$
l'arc xy de la courbe xyz . . . . $= x$
la vîtesse de la surface AB . . . . $= u$
la vîtesse de la section OL . . . . $= v$
le cosinus de l'angle variable myn que fait
en y la verticale ym avec la courbe . . . $= f$
la hauteur dûe à la vîtesse u . . . . $= r$.

Cela posé, il est clair que la partie de la pesanteur qui agit suivant yn est exprimée par $f.g$, le sinus total étant 1. Par conséquent, si les tranches n'agissoient point les unes sur les autres, la vîtesse v, à la fin de l'instant dt, deviendroit $v + fgdt$; & comme elle devient $v + dv$, on voit que les différentes tranches animées de la vîtesse $fgdt - dv$ doivent se faire équilibre. On a donc $\int dx(fgdt - dv) = 0$; d'où l'on tire (en mettant pour dt sa valeur $\frac{dx}{v}$, pour v sa valeur $\frac{Ku}{y}$),

$$\frac{gydx}{Ku}\int fdx - Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydx\int\frac{dy}{y^3} = 0.$$

Les intégrales indiquées doivent répondre à la courbe entière xyz. Soient donc alors $\int fdx = F$, $\int\frac{dx}{y} = N$, & considérons que $\int\frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2K^2} - \frac{1}{2G^2}$; notre équation deviendra

(A) $F.G^2ydx - K^2G^2Ndr + rydx(G^2 - K^2) = 0.$

III. Qu'au premier instant du mouvement le fluide occupe l'espace $VZFHRG$; & nommons z

l'arc Mx parcouru par la surface AB de ce fluide. Il est clair que la nature de la courbe $Mxyz$ étant donnée, & les deux espaces $VZFHRG$, $ABFDEG$ occupés successivement par le fluide, étant égaux entr'eux, les quantités F, G, K, N, ydx, peuvent être exprimées en fonctions de z, dz, & de constantes. Donc la vîtesse u de la surface AB sera aussi une fonction de z; & à cause de $dt = \frac{dz}{u}$, on aura encore t en fonction de z.

IV. Appliquons cette théorie générale à des exemples.

Je suppose que le syphon soit cylindrique; & que la courbe $Mxyz T$ soit une demie circonférence de cercle, dont le diamètre MT est horisontal. On aura $G = K = y$, & chacune de ces quantités sera constante & donnée. Soient

le raïon CM .... $= 1$
l'arc Mx .... $= z$
l'arc indéterminé Mxy .... $= q$
la demie circonférence $MxyzT$......... $= \pi$
l'arc xyz occupé par le fluide.......... $= n . \pi$,
n étant un nombre constant, moindre que l'unité.

La quantité F ou $\int f dx$ deviendra ici $\int dq \operatorname{cos.} q = \operatorname{sin.} q + A$, intégrale qui doit s'évanouir lorsque $q = z + n . \pi$, & commencer lorsque $q = z$; car à l'extrémité z de l'arc xyz la pesanteur cesse d'agir sur le fluide, & le point x est l'origine du fluide. On aura donc $F = \operatorname{sin.} z - \operatorname{sin.} (z + n . \pi)$.

De plus $N = \frac{n\Pi}{G}$ & $dx = dz$. Par conséquent l'équation générale (A) deviendra

$$dz(\sin. z - \sin.(z + n\Pi)) - n\Pi dr = 0,$$

d'où l'on tire (en supposant que le fluide parte du point M, & par conséquent $r = 0$, lorsque $z = 0$),

$$r = \frac{1 - \cos. n\Pi - \cos. z + \cos.(z + n\Pi)}{n\Pi},$$

expression générale de la hauteur dûe à la vîtesse de la surface AB.

Si l'on fait $z = \Pi - n\Pi$, ou qu'on suppose que la surface antérieure DE du fluide parvienne en T, on trouvera encore $r = 0$. D'où il suit qu'alors le fluide aura perdu toute sa vîtesse, & qu'il redescendra. Il continuera ainsi à faire des oscillations qui s'étendent suivant la demie circonférence depuis le point M jusqu'au point T. A l'égard de leur durée, on la trouvera par l'équation $t = \int \frac{dz}{u} = \int \frac{dz}{\sqrt{2gr}} =$

$$\frac{\sqrt{n\Pi}}{\sqrt{2g}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - \cos. n\Pi - \cos. z + \cos.(z + n\Pi))}}.$$

V. Pour second exemple, supposons que le syphon (Fig. 108) soit composé de trois tuyaux rectilignes *GFKH*, *MFG*, *NKH*, qui ont des diamètres égaux, & dont le premier est horisontal, tandis que les deux autres sont inclinés. Qu'on élève les verticales *FI*, *KS*; & qu'on prenne la section constante & perpendiculaire de Fig. 108.

chaque tuyau . . . . $= K$
le cosinus de l'angle BFI. . . . . $= p$
le cosinus de l'angle DKS. . . . . $= q$
la longueur donnée $xytz$ de l'espace occupé par le fluide . . . . $= l$
l'espace donné My compris entre un point fixe M pris à volonté, & le point y. . . . . . $= b$
la longueur donnée yt du tuyau horisontal. . $= c$
l'espace Mx parcouru dans un temps t par la surface AB du fluide . . . . $= z$.

Cela posé, comme la loi de continuité n'est pas observée dans le passage d'un tuyau à l'autre, on appliquera à chacun d'eux les raisonnemens de l'article 11. On trouvera que pour le tuyau $ABFG$, la quantité $\int f dx$ est $p\ (b - z)$; & que pour le tuyau $EDKH$ elle est $q \times tz = q\ (z + l - b - c)$. Retranchant la seconde partie de la première, le reste $p\,(b - z) - q\,(z + l - b - c)$ sera la valeur de F pour le syphon entier. De plus la quantité $\int \frac{dx}{y}$ ou N sera ici $\frac{l}{K}$. Par conséquent l'équation générale (A) deviendra (en observant que $y = K$, $dx = dz$, $G = K$),

$$dz\,(p\,(b - z) - q\,(z + l - b - c)) - l\,dr = 0;$$

d'où l'on tire

$$r = \left(\frac{p + q}{2l}\right) \times \left(\frac{2\,(pb + qb + qc - ql)\,z}{p + q} - zz\right).$$

Donc, à cause de $dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$, on aura

$$t = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g(p+q)}} \times \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2(pb+qb+qc-ql)z}{p+q} - zz\right)}},$$

intégrale qui dépend en général de la quadrature du cercle. Représentons, pour abréger, le coëfficient de z par $2A$. De plus nommons B le quart de circonférence pour le raïon A; T le temps employé à parcourir l'espace A. On aura $t = \frac{\sqrt{l}}{A\sqrt{g(p+q)}}$ $\times \int \frac{A\,dz}{\sqrt{(2Az - zz)}}$; & $T = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g(p+q)}} \times \frac{B}{A}$.

Or $\frac{B}{A}$ est une quantité constante, quelque soit le raïon A. Donc T est une quantité constante, donc les oscillations entières du fluide sont isochrones entr'elles, quelles que soient leurs amplitudes.

Soient L la longueur d'un pendule qui décrit de petits arcs de cercle, C la distance initiale de ce pendule à la verticale, D le quart de circonférence pour le raïon C, z l'espace que le pendule parcourt circulairement, pendant le temps t, avec la vîtesse v, T' le temps qu'il employe pour arriver à la verticale. On aura $v\,dv = \frac{g(C-z)\,dz}{L}$, & par conséquent $vv = \frac{g(2Cz - zz)}{L}$. Donc $t = \int \frac{dz}{v}$ $= \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \int \frac{dz}{\sqrt{(2Cz - zz)}}$, & $T' = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$ $\times \frac{D}{C}$. Egalant cette valeur de T' à celle de T,

& conſidérant que $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, on aura $L = \frac{l}{p+q}$, expreſſion de la longueur du pendule qui fait ſes oſcillations dans le même temps que le fluide. Ce réſultat s'accorde avec celui qui a été donné ſans démonſtration par M. Jean Bernoulli. (Voyez ſes *Œuvres*, *tom. III*, pag. 125.)

Lorſque les tuyaux *ABFG*, *EDKH* ſont verticaux, on a $p = 1$, $q = 1$; & l'équation $L = \frac{l}{p+q}$ devient $L = \frac{1}{2} l$, c'eſt-à-dire, que la longueur du pendule qui fait ſes oſcillations dans le même temps que le fluide eſt la moitié de la longueur de la colonne fluide ; ce qui s'accorde avec l'article 306.



Additions & éclaircissemens.

PAG. 329. On auroit pu remarquer en passant que l'équation $\int dx\,(gdt - dv) = 0$ ou $\int dx\,dv = \int dx . gdt$ renferme le principe de la conservation des forces vives. Car en mettant pour dx sa valeur vdt dans le premier membre, & multipliant tout par la quantité constante $y\,dx$, on a $\int y\,dx . vdv = \int y\,dx . gdx$ qui contient évidemment le principe en question. La même remarque s'applique à toutes les équations analogues à la précédente.

PAG. 342. Il est dit à la fin de l'article XIV, que la pression d'un fluide en mouvement, contre les parois du vase, peut devenir négative. Le calcul ne laisse là-dessus aucun doute. Mais voici une expérience de M. Daniel Bernoulli, qui montre la chose aux yeux. *ACFB* (Fig. 109) est un cylindre dans le fond duquel est adapté un tube conique *DGHE* garni lui-même d'un petit tube latéral *l* qui reçoit l'une des extrémités du tube de verre, recourbé *lmn*. Les dimensions employées par M. Bernoulli, sont telles que CA = 3 pouces 10 lignes; El = 4 lignes; lH = 2 pouces $9\frac{1}{2}$ lignes; lmn = 5 pouces 6 lignes; la section du tube conique en l, est à l'aire de l'orifice GH, comme 10 est à 16. L'orifice n du tube lmn est plongé dans l'eau du vase *M*. En mettant le doigt à l'orifice GH, remplissant le vase *ACFB* & l'en- Fig. 109.

tretenant toujours plein, l'eau s'écoule par le tube de verre *lnm* dans le vaſe *M*; enſuite ôtant le doigt pour permettre à l'eau de s'écouler par *GH*, l'eau monte du vaſe *M* par le tuyau *nml* & vient s'écouler par l'orifice *GH*; le vaſe *M* ſe vuide entièrement. Si l'on bouche une partie de l'orifice *GH*, on pourra faire enſorte que l'eau dans le tube de verre *lnm* monte ou deſcende à volonté. Il eſt aiſé d'expliquer cette expérience. Quand l'eau monte du vaſe *M* par le tuyau *nml*, cela arrive parce que la preſſion du fluide le long du tuyau conique *DGHE* devient négative en *l*, & qu'en conſéquence la preſſion de l'atmoſphère ſur la ſurface du vaſe *M* oblige l'eau à monter ſuivant *nml*. Cette même preſſion de l'atmoſphère empêche alors les parties du fluide de ſe ſéparer.





TABLE DES MATIERES CONTENUES DANS LE PREMIER VOLUME.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

Note 8

CHAPITRE II.

Fin de la Table du premier Volume.

ERRATA du Tome I.

Page 15, *ligne* 7 — 8, multiplie *lisez* multiple
Page 25, *vis-à-vis de l'article* 44, *mettez à la marge* Fig. 15
Page 29, *ligne* 1 *en remontant* ur *lisez* sur
Page 71, *ligne* 1, tranche *lisez* branche
Page 72, *ligne* 14, 12 ; 8 *lisez* 12 : 8
Page 93, *ligne* 21, ferme *lisez* terme
Page 135, *ligne* 11, *ZT lisez VT*
Page 201, *ligne* 14, bas, *lisez* bas.
Page 202, *ligne* 15, parlant *lisez* partant
Page 246, *ligne* 1, *effacez* réciproquement
Ibid. ligne 3, tranchée *lisez* tranche
Page 344, *ligne* 27, RO *lisez* QO

AU RELIEUR.

Il faut mettre ce feuillet à la fin du Tome premier.

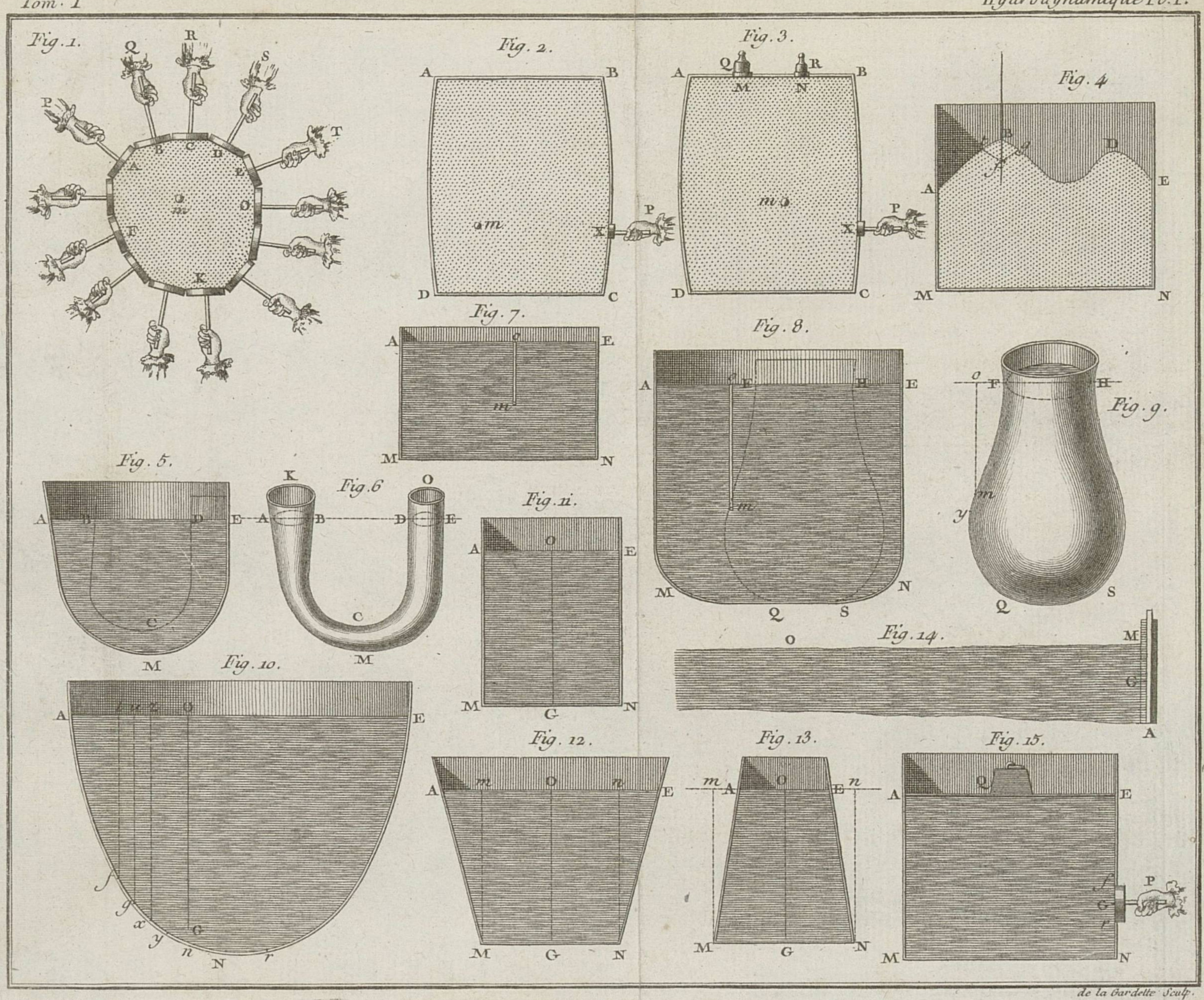
Supplément aux deux Errata de l'Hydrodynamique.

Tome I.

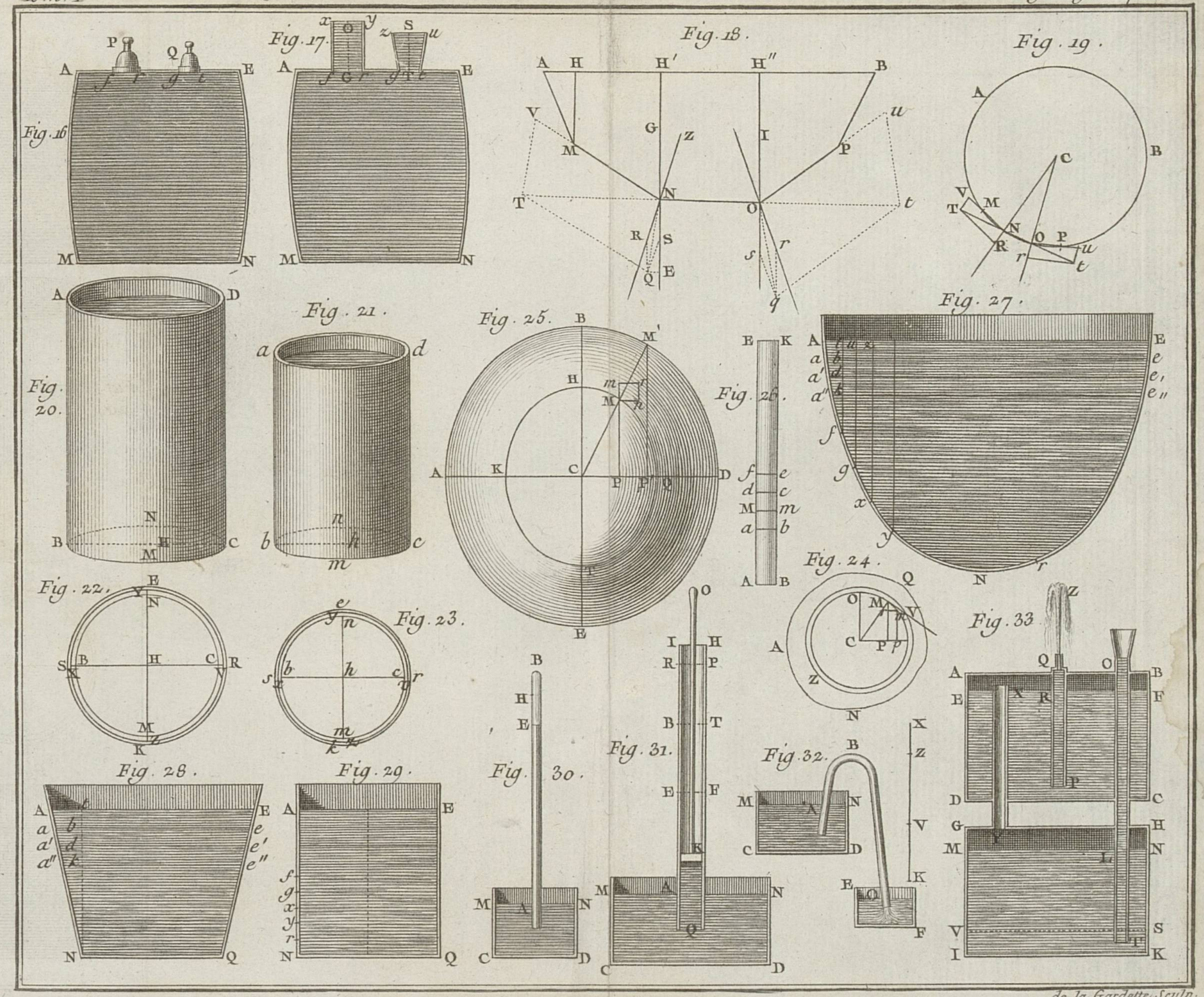
Pages.	Lignes.	Fautes.		Corrections.
35,	*dernière*,	3 lignes	*lisez*	$\frac{1}{2}$ ligne
214,	20,	$EeDd$	*lisez*	Ee, Dd
265,	3,	$(H-h)^2$	*lisez*	$(H-h)^4$
266,	11,			*même correction*
273,	22,	comparifon	*lisez*	comparaifon
330,	13,	qui a pour ordonnées les	*lisez*	dont les ordonnées font réciproquement proportionnelles aux
332,	5 & 10,	$f\sqrt{s}$	*lisez*	$\sqrt{fs}$
345,	17,	la	*lisez*	fa
346,	*dernière*	$\frac{2 \text{ fin. } z^2 (1 + \text{cof. } z)}{8}$	*l.*	$\frac{2 \text{ fin. } z^2 \sqrt{(1 + \text{cof. } z)}}{3}$
349,	13, *après le mot*	vafes	*ajoutez*	prifmatiques
360,	5, *au comm.*	$-gydx$	*lisez*	$-\frac{gydx}{Ku}$
372,	9,	doublée	*lisez*	fous-doublée

Tome II.

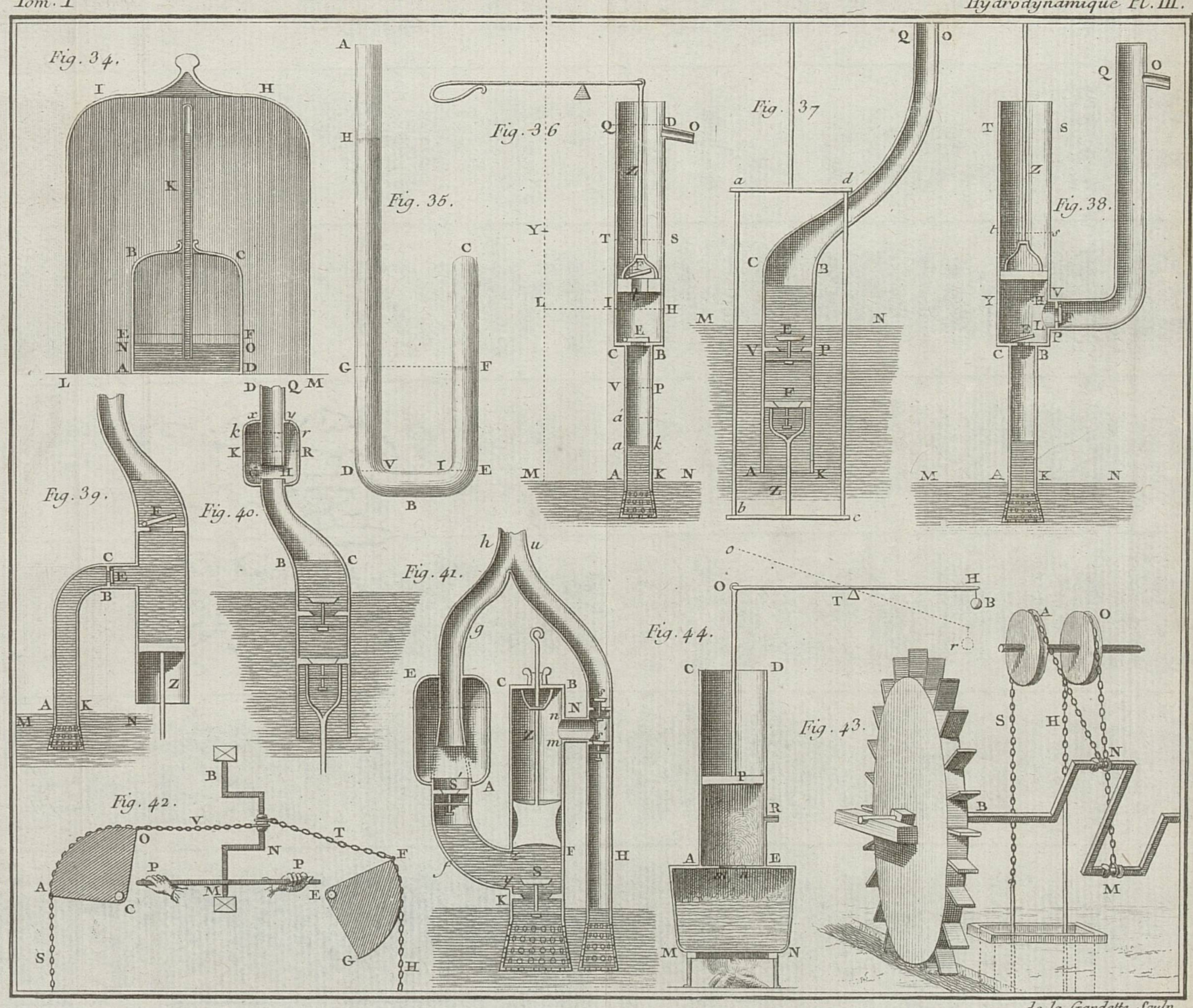
PAGES.	LIGNES.	FAUTES.		CORRECTIONS.
41,	24,	1553	*lisez*	1353
44,	1,	de 1	*lisez*	de 1 pouce
Ibid.	19,	*après le mot* petit	*ajoutez*	trou
96,	7,	diamètre	*lisez*	hauteur
167,	7 & 14,	*après le mot* pouces	*ajoutez*	cubes
300,	15,	perpendiculairement	*lisez*	parallèlement
306,	1,	*après le mot* percussion	*ajoutez*	oblique
311,	20,	cylindrique	*lisez*	cylindre
323 & 324		*Dans le cours des articles 746 & 747, au lieu de* Fig. 76,	*lisez*	Fig. 77.
403,	15,	$n a^2 V$	*lisez*	$n a^2 V^2$.
427,	3,	contenue dans le	*lisez*	sortie du



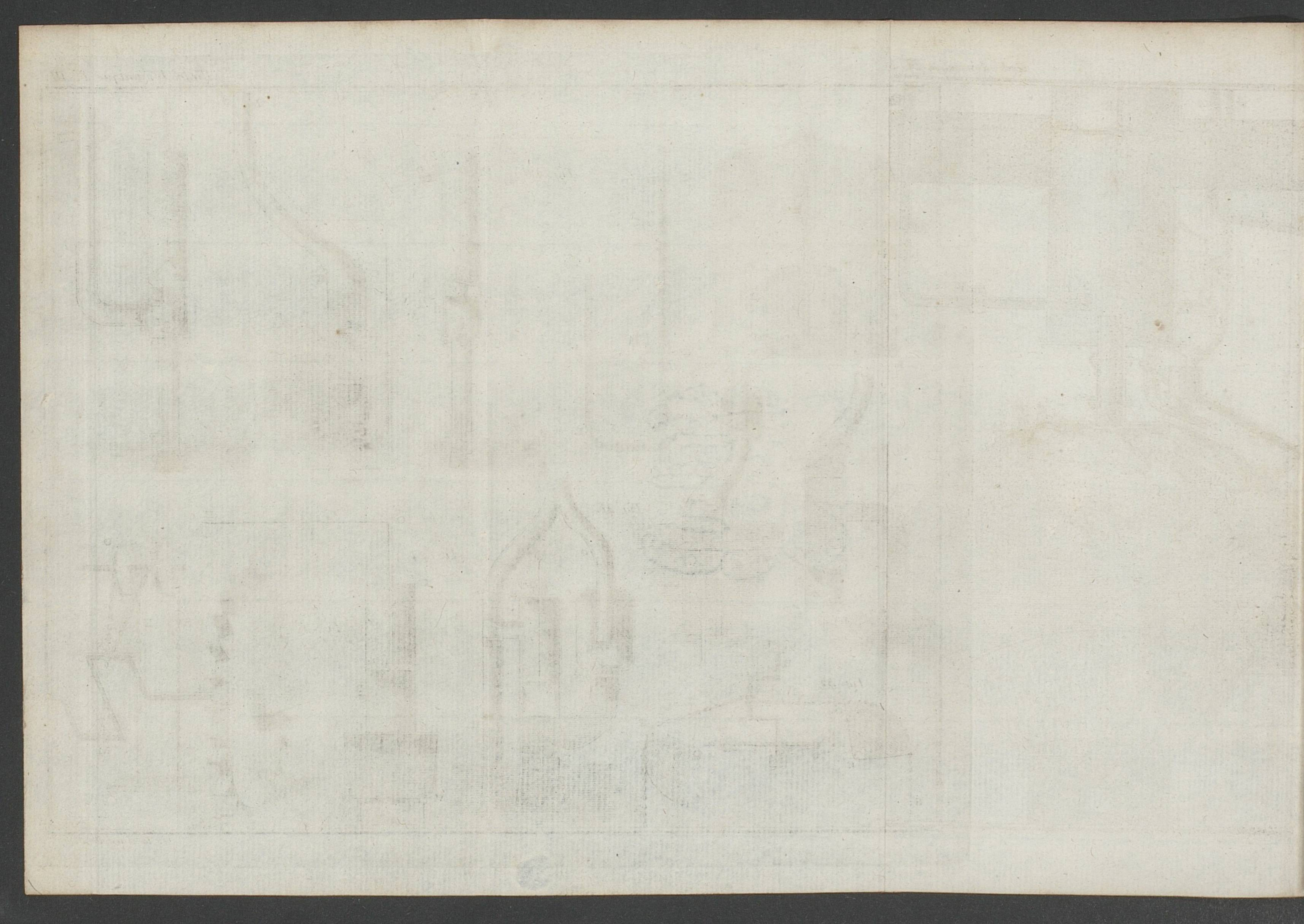
de la Gardette Sculp.

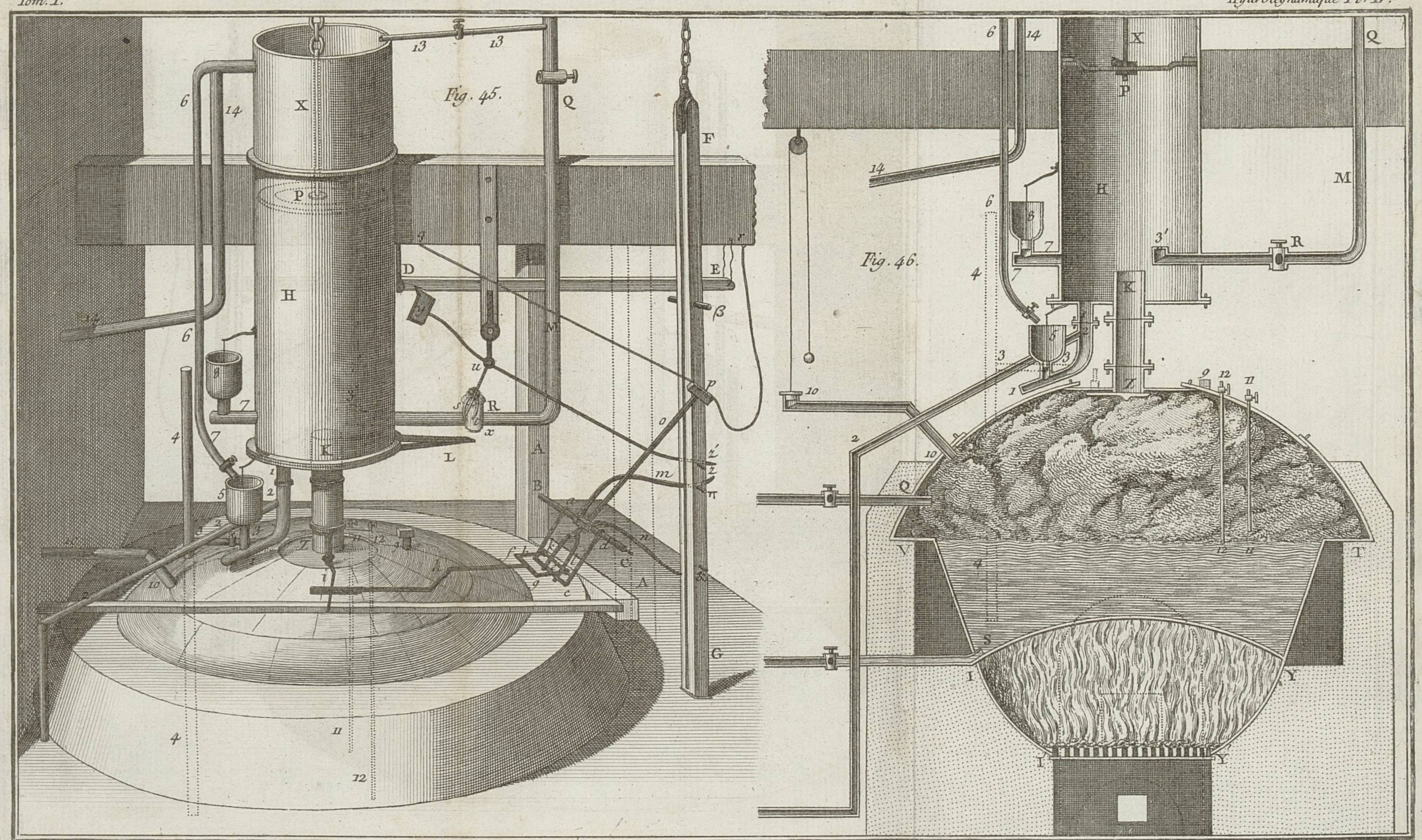


de la Gardette Sculp.

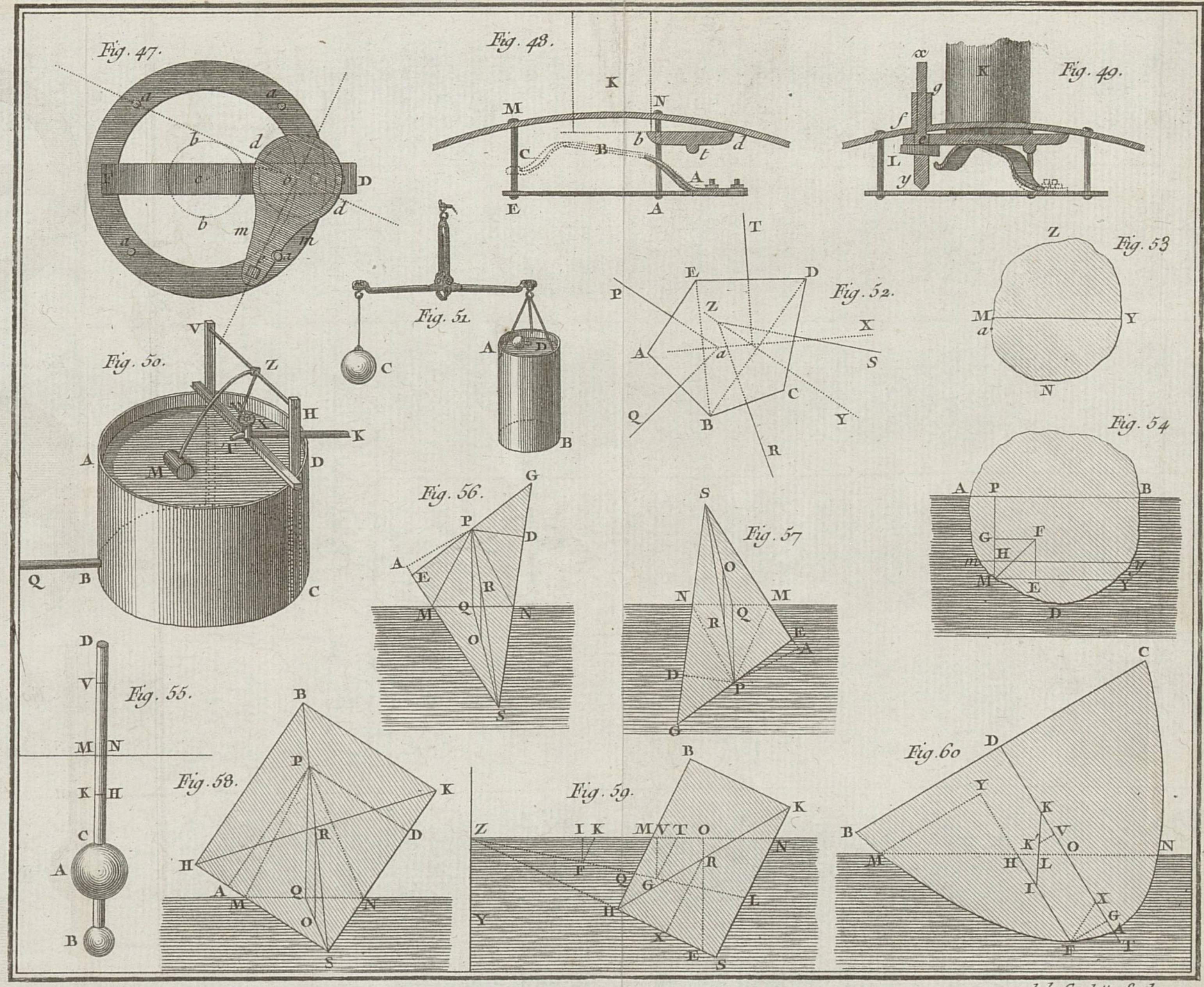


de la Gardette Sculp.

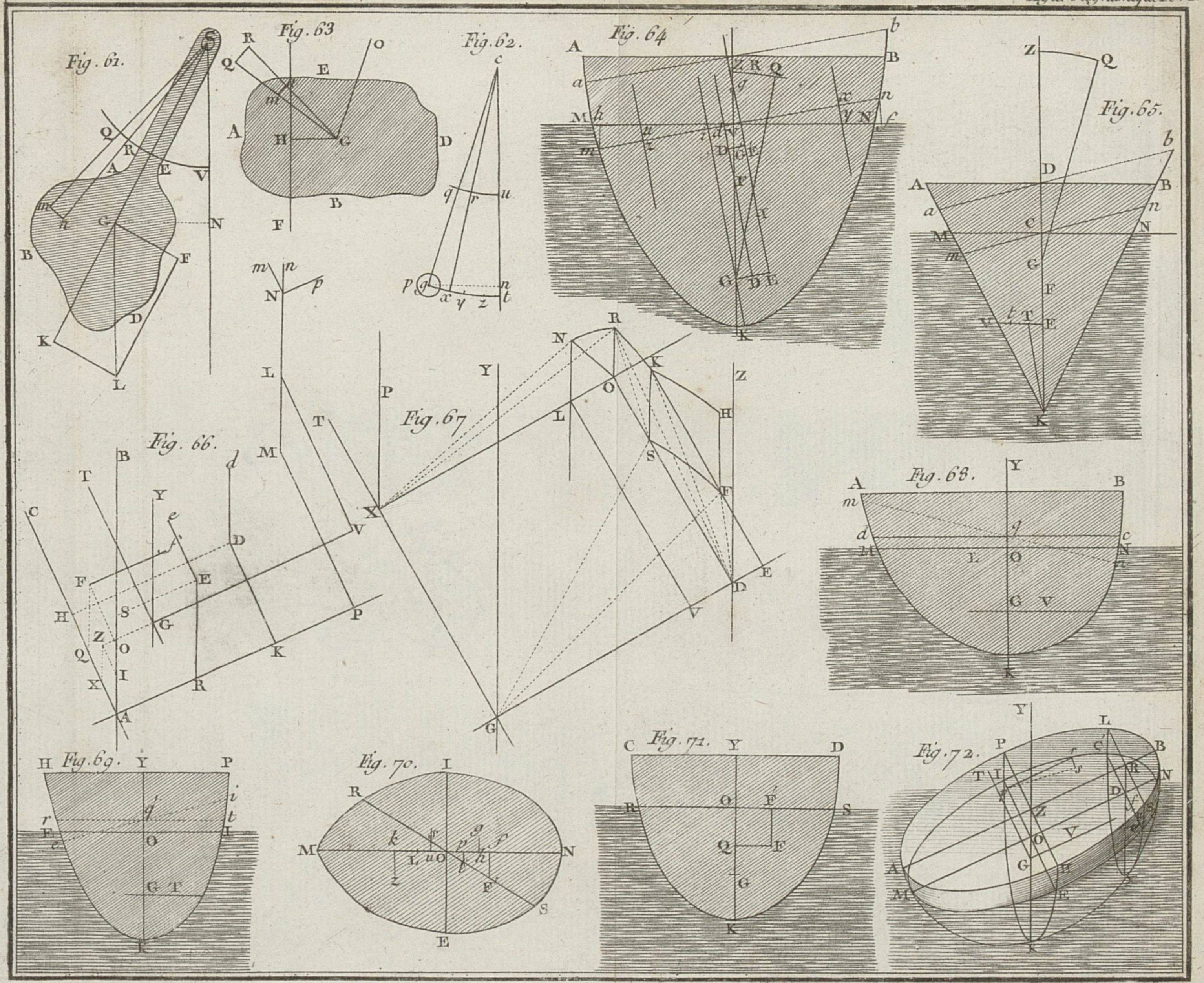




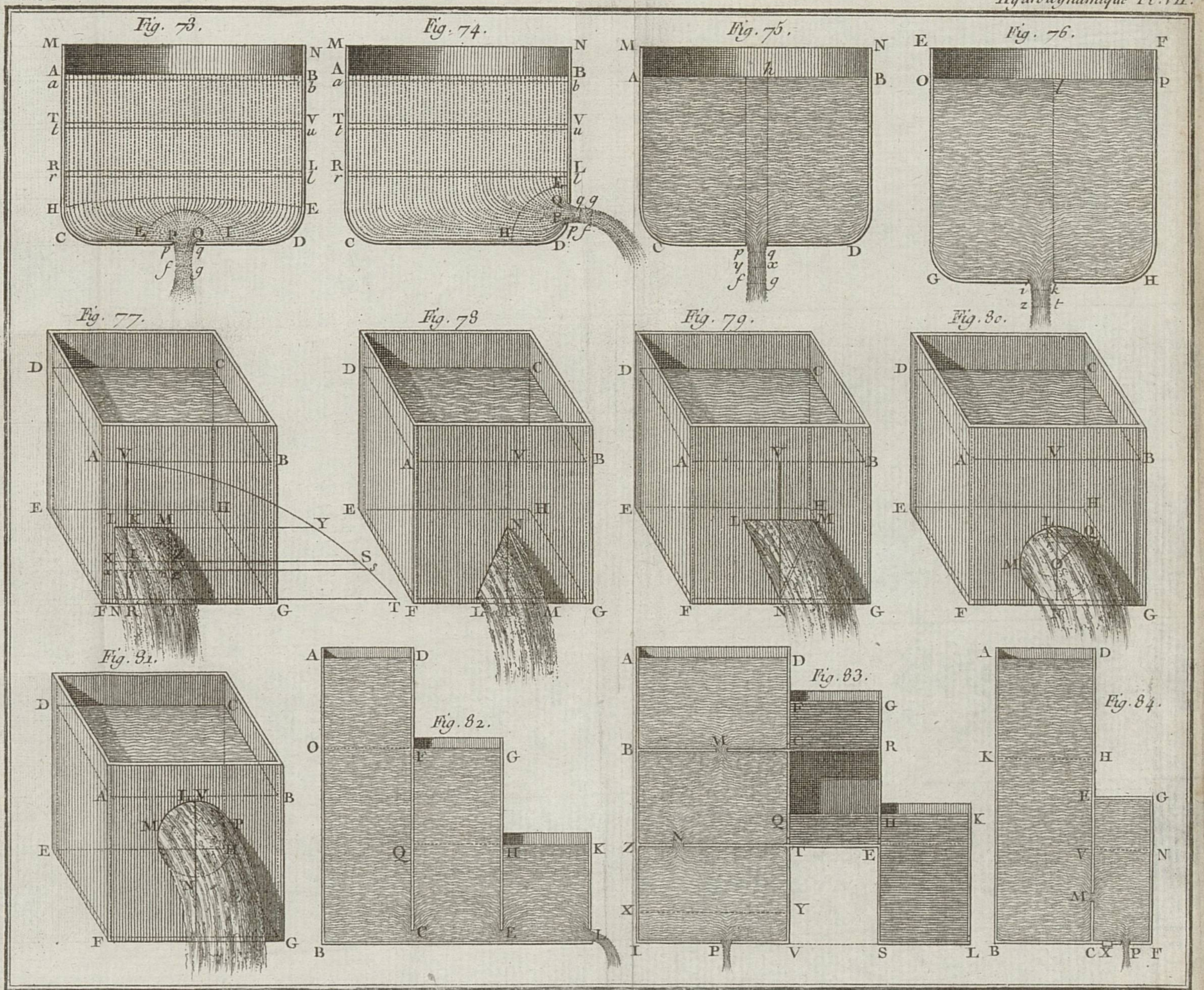
de la Gardette Sculp.



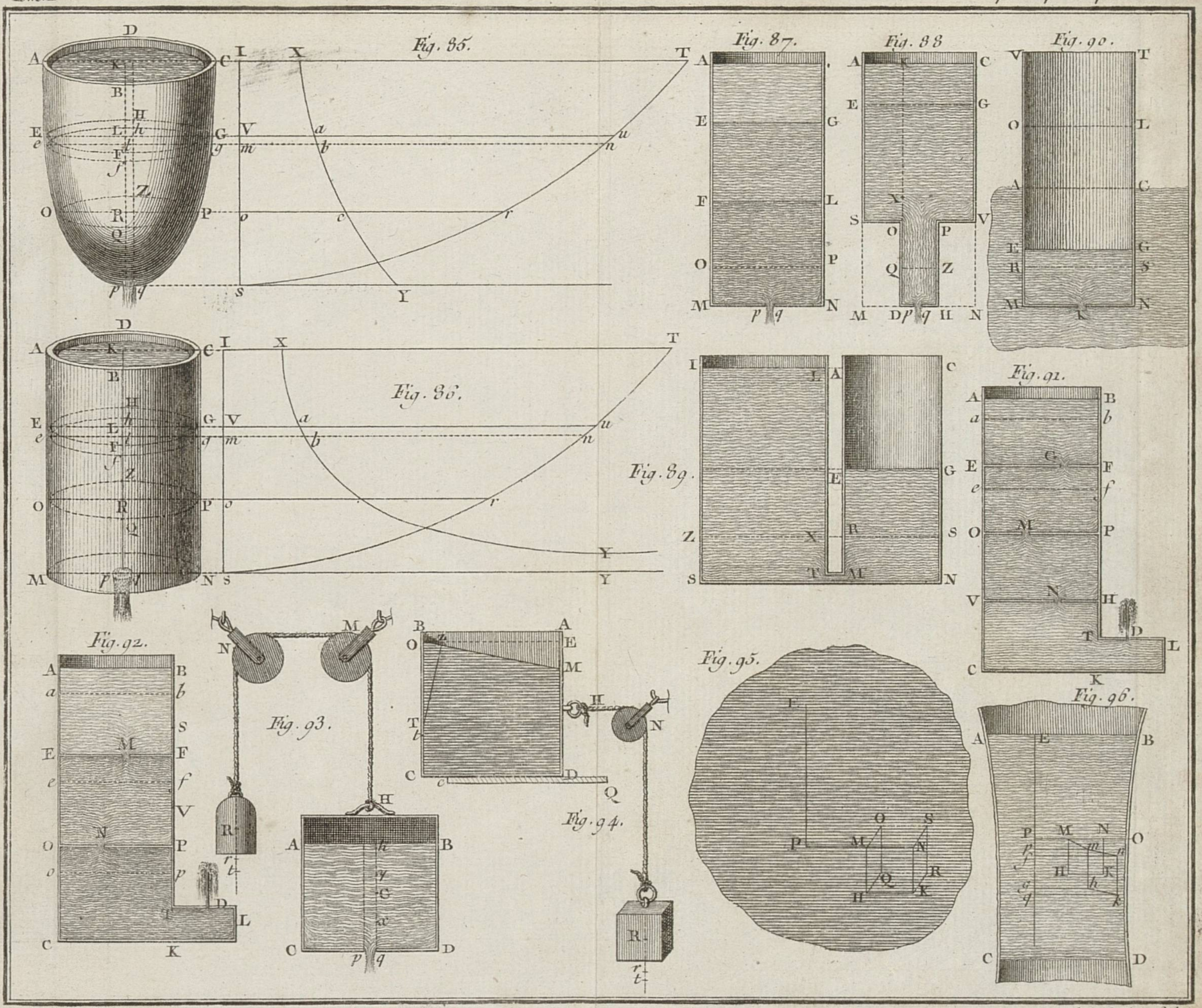
de la Gardette Sculp.



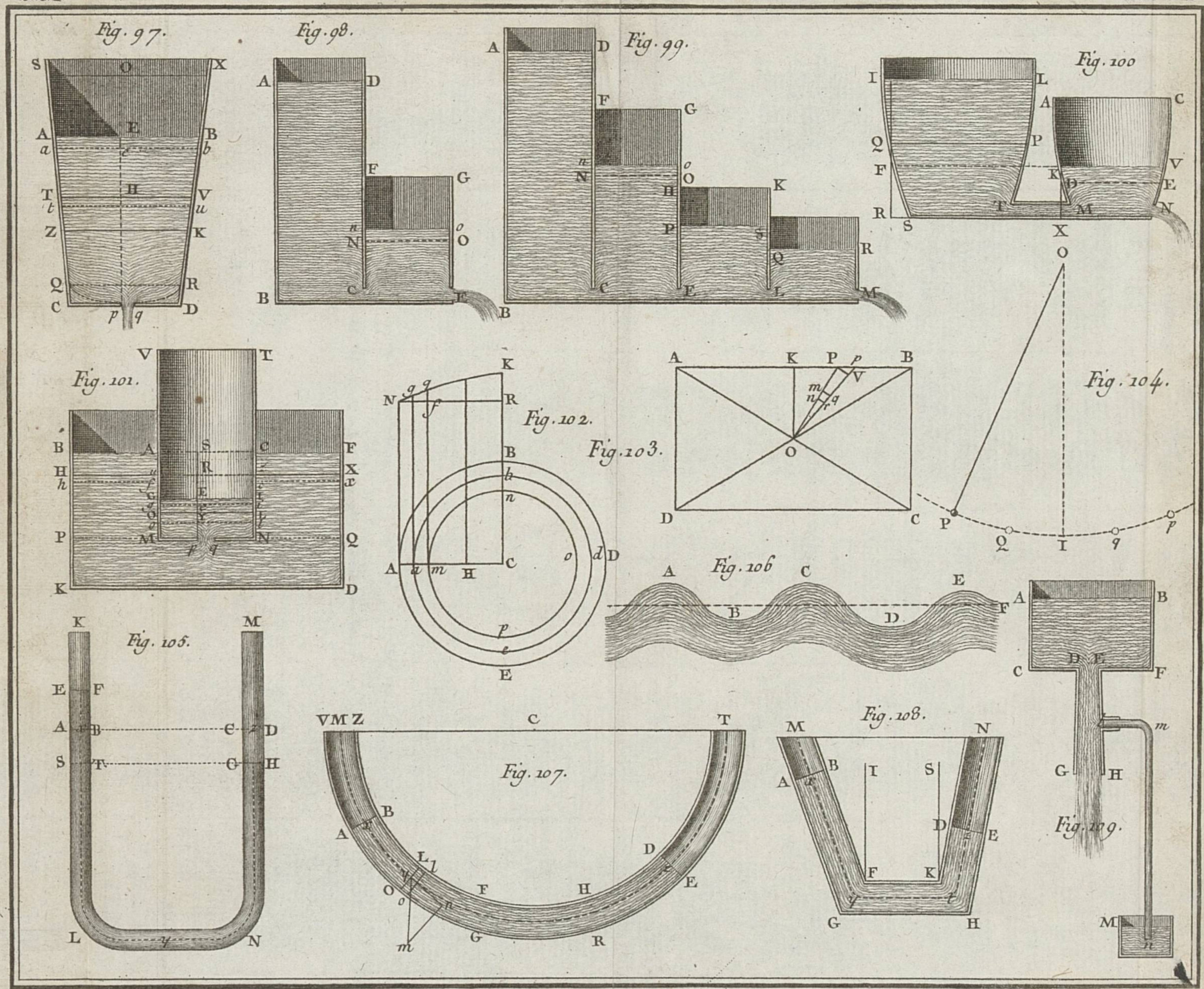
de la Gardelle Sculp.



de la Gardette Sculp.



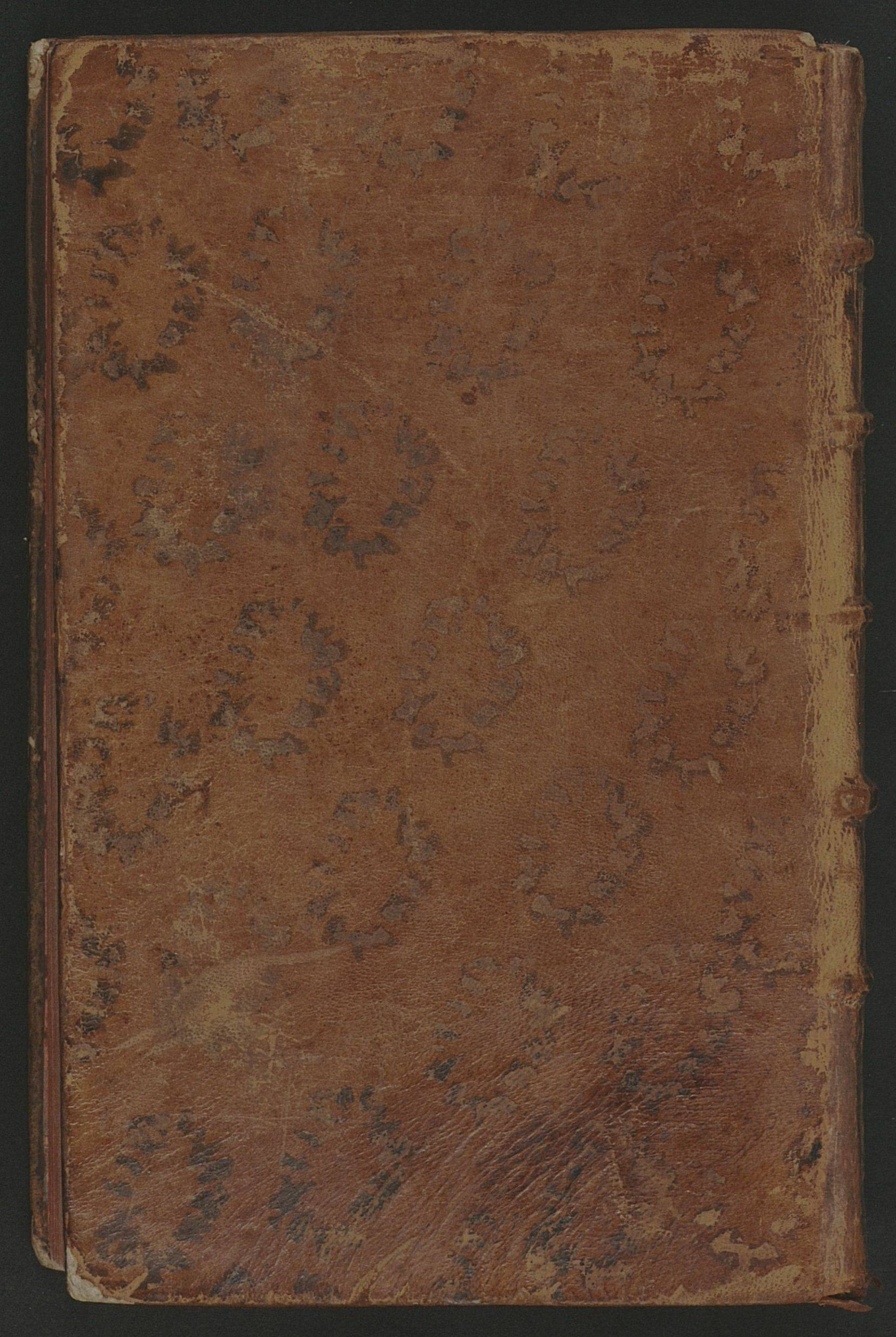
de la Gardelle Sculp.

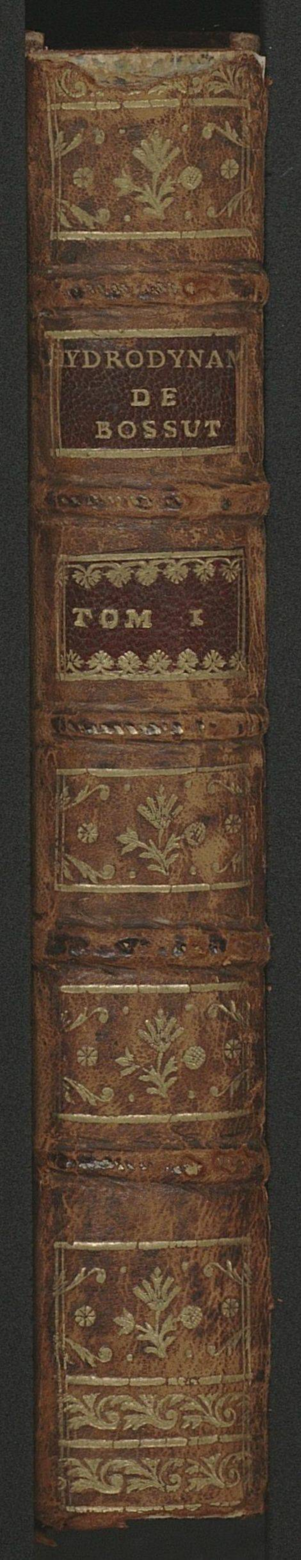


de la Gardette Sculp.








HYDRODYNAM
DE
BOSSUT
TOM I



inches 4 3 2 1 0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams